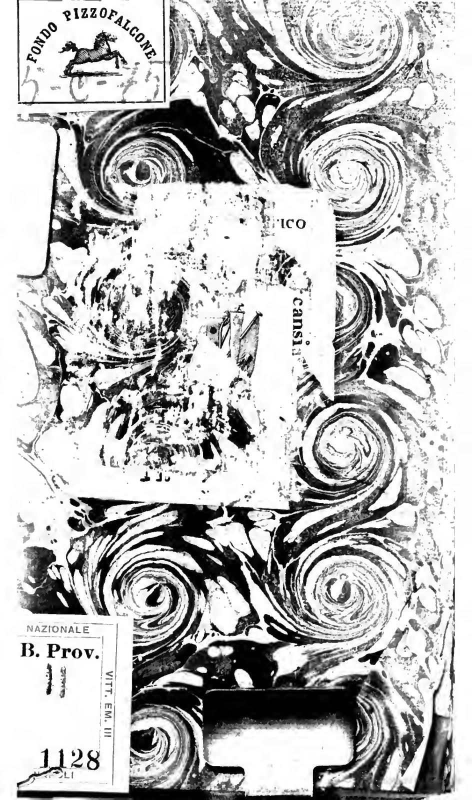
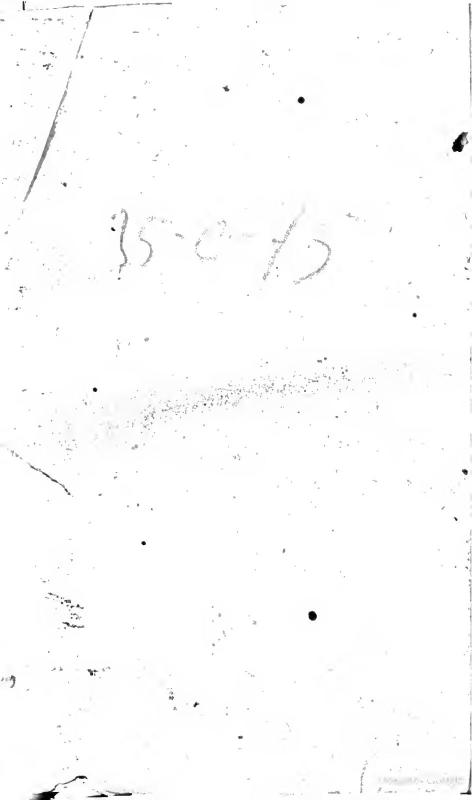
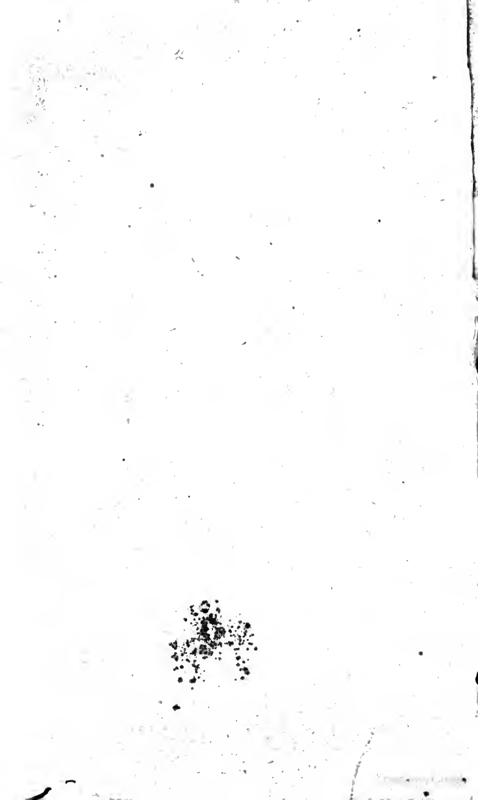



ICO
cansi







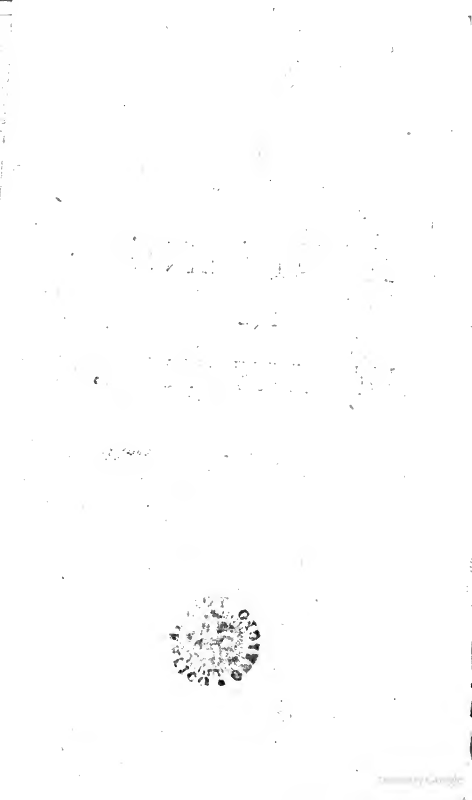
ÉLEMENS

DE

GÉOMETRIE.



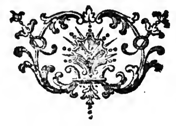




ÉLEMENS
DE
GÉOMETRIE,

TRADUITS DE L'ANGLOIS

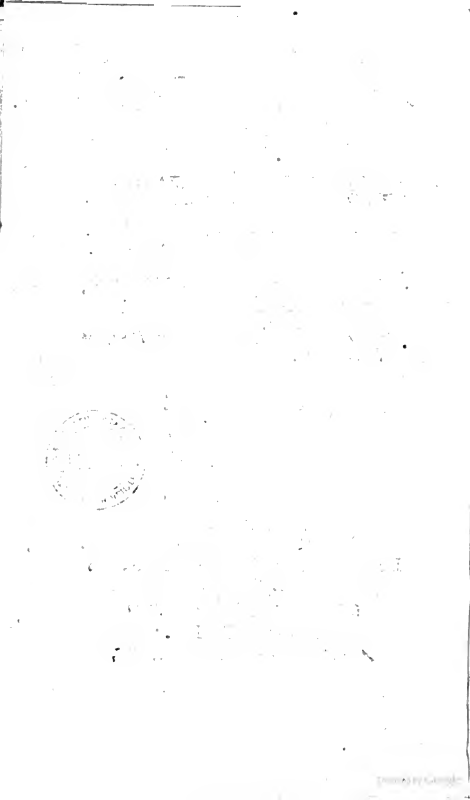
De M. THOMAS SIMPSON, *de la Société Royale de Londres, Professeur de Mathématiques à Woolwich.*





A PARIS,
De l'Imprimerie de VINCENT, rue S. Severin.

M DCC LV.
Avec Approbation, & Privilége du Roi.





PRÉFACE
DE L'AUTEUR.

MON deſſein a été, en compoſant cet Ouvrage, de procurer aux Commençans des Élemens dont la méthode fut plus ſimple & en même tems plus rigoureuſe que celle qu'on employe ordinairement. Ces deux conſidérations m'ont paru néceſſaires, pour que les principes de la Géométrie puiſſent s'imprimer plus aiſément dans leur eſprit. J'ai cru que c'étoit même le ſeul moyen de prévenir le dégout qu'entraîne après ſoi ce grand nombre de Propoſitions inutiles dont les anciens Élemens ſont chargés, & le danger des méthodes peu Géométriques

qui font le fonds de la plûpart des Elemens modernes.

J'ai senti toute la difficulté de l'objet que je me proposois, & je n'ai pas douté un instant qu'on ne m'accusat de présumer trop de mes forces en entreprenant de le remplir après un Géometre tel qu'Euclide. Mais sans prétendre rien retrancher de l'estime que j'ai pour les Elemens de cet homme célébre, ouvrage qui jouit à juste titre de l'approbation générale & soutenue de tous les Géometres qui l'ont suivi, j'oserai assurer le Lecteur qu'il trouvera dans ceux que je lui présente des choses dignes de son attention & qu'il chercheroit peut-être vainement ailleurs.

L'exactitude du raisonnement & la certitude des conclusions constituent sans doute l'essence de la Géométrie ; c'est d'elles que dérive l'attrait qui nous entraîne vers cette science, & la volupté, s'il est permis de se servir de cette expression,

que l'on goute en l'étudiant ; c'eſt ce qui m'a déterminé à conſerver à mes démonſtrations , à l'exemple d'Euclide, le plus de rigueur qu'il m'a été poſſible. Cette qualité leur eſt non ſeulement néceſſaire, mais encore ſpécialement propre & particuliere.

Cette même raiſon m'a déterminé auſſi à ajouter un nouveau *Poſtulatum* à ceux d'Euclide. C'eſt une addition dont je ne crois pas que perſonne me nie la néceſſité ; au ſurplus c'eſt une liberté que je juſtifierois aiſément par l'exemple de cet illuſtre Auteur, qui a lui même ſuppoſé plus d'une fois dans ſes Élemens ſans démonſtration, des choſes qui ne ſont pas d'une moindre conſéquence que celle-ci. Il dit, par exemple, dans la XXII[e] Propoſition de ſon premier Livre ; (je ne citerai que ce ſeul endroit) *que les lignes tirées de deux points donnés à l'interſection de deux cercles* ſatisferont aux conditions du problême propoſé, ſans avoir préa-

lablement démontré que ces deux cercles doivent se couper mutuellement. Je pourrois relever aussi quelques autres endroits peu exacts, & si je le faisois ce ne seroit assurement pas pour donner à entendre que je les regarde comme de vraies fautes, mais pour faire excuser les petites erreurs & les distractions qui peuvent m'être échappées ; l'exemple d'un Géometre si exact prouveroit combien il est difficile d'éviter les fautes de cette espece dans le cours d'un ouvrage.

Je me suis sur-tout écarté de sa méthode dans ce qui concerne les proportions, ce n'est pas qu'elle ne soit exacte, mais la définition qu'il donne des raisons & des proportions n'est pas aussi naturelle & aussi simple qu'elle pourroit l'être. Et ce que j'en dis est conforme à ce qu'on en a écrit dans les différentes disputes qui se sont élevées sur cette matiere.

Le but d'une définition est de décrire & d'expliquer le défini d'une

façon nette, exacte & précise ; on ne doit par conséquent y employer que des termes sur le vrai sens desquels on ne puisse former d'équivoque, & qui soient même plus connus & d'un usage plus ordinaire que le terme qui exprime le défini lui-même.

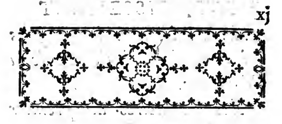
Si un Auteur, dans le dessein d'éluder les objections, s'enveloppe & se cache, pour ainsi dire, dans une définition obscure dont les termes soient équivoques & ne présentent qu'un sens incertain, il aura beau la retourner, elle sera quoiqu'il fasse insuffisante ; le défaut de clarté est dans ce cas un vice radical qu'on ne peut guérir qu'en changeant les termes. Ces réflexions m'ont déterminé à ne point définir la proportion. Je n'ai point trouvé de terme qui exprimât mieux ce que l'on entend par ce mot que le mot lui-même pris dans sa commune acception.

J'avois d'abord résolu de ne rien dire des Solides, mais, pour rendre

cet Ouvrage d'une plus grande utilité, j'en ai démontré les principales propriétés dans un *Appendix* où je me suis cependant, pour ne pas trop grossir le volume, beaucoup moins étendu que dans le reste de ces Élemens. J'espére néanmoins que ce que j'en dis, & ce que j'ai écrit aussi sur leur mesure, suffiront à ceux même qui n'auront point lû d'autre Ouvrage sur cette matiere.

Quant à l'Essai sur les *Maximis* & *Minimis* des lignes, des angles & des surfaces, & à la construction Géométrique des Problêmes qui terminent ces Élemens, je me flatte que les personnes même qui ont des avances considérables en Géométrie y trouveront des choses dignes de leur attention, & peut-être de leur approbation.





AVERTISSEMENT DU TRADUCTEUR.

Les mêmes raiſons qui ont déterminé M. Simpſon à compoſer ces Élemens & que l'on vient de voir dans ſa Préface, m'ont déterminé auſſi à en donner la Traduction. C'eſt la rareté des bons Élemens & l'utilité d'une méthode plus rigoureuſe & moins embarraſſée que les méthodes ordinaires. Celle de M. Simpſon m'a paru réunir ces avantages & j'ai cru qu'en traduiſant ſon Ouvrage, je me

rendrois utile aux jeunes gens qui se destinent à l'étude de la Géométrie.

Les Géometres du premier ordre se déterminent rarement à composer des Livres élementaires ; il n'appartient cependant qu'à eux d'en faire de bons, parce qu'ils sont les seuls qui puissent appercevoir distinctement la chaîne secrette qui lie les vérités Géométriques, & qui sachent par conséquent nous conduire de l'une à l'autre sans nous égarer. Mais ne seroit-ce pas là revenir sur ses pas du bout d'une route longue & pénible pour le seul motif de guider ceux qui se présentent pour la commencer ? Et n'y auroit-il pas trop d'indiscrétion à

l'exiger? M. Simpſon nous a donné l'exemple de ce procédé généreux ; il n'a pas dédaigné d'applanir les premieres difficultés de cette ſcience ; il ne s'en eſt pas même tenu aux ſeuls Élemens ordinaires, il y a ajouté deux petits Ouvrages qui ne peuvent être que très-utiles, & qui ne ſont pas déplacés dans un Livre élementaire. Le premier eſt un eſſai ſur les Maximis & Minimis *des lignes, des angles & des ſurfaces ; ce morceau eſt neuf, & M. Simpſon eſt le premier que je ſache qui ait donné quelque choſe de ſuivi dans ce genre. Le ſecond eſt une ſuite de Problêmes curieux, utiles & compliqués dont il donne la conſtruc-*

tion géométrique. Cette matiere reſervée juſqu'ici aux ſeuls Algébriſtes qui tiroient leurs conſtructions de la ſolution analitique, eſt miſe par M. Simpſon à la portée des commençans ; elle devient une ſuite des Élemens qui les accoutumera inſenſiblement à la conſideration des Problêmes encore plus compliqués, & leur formera cet eſprit géométrique des Anciens auquel on ſeroit tenté de croire, ſuivant la réflexion d'un Auteur célebre, que l'analiſe employée de trop bonne heure pourroit nuire.

Le XLV[e] *Problême eſt dans l'original Anglois ſans conſtruction & ſans démonſtration ; j'ai cru néceſſaire d'y ajoûter l'une & l'autre, & depuis j'y ai joint*

celle que M. Simpson m'a envoyée.

Pour l'éclaircissement du nota *qui est à la suite de ce Problême, il eut été nécessaire de construire & de démontrer le suivant :*

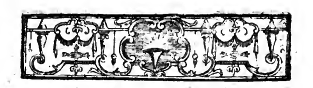
Trouver un point d'où trois lignes tirées à trois points donnés ayent des différences données ; *mais faisant réflexion que ce Problême se trouve dans plusieurs Auteurs j'y renvoye le Lecteur.*

J'ai changé sur l'avis de M. Simpson l'ordre des Problêmes IX & X, ainsi que leurs constructions & leurs démonstrations, & j'ai substitué au IXe Theoreme du quatrieme Livre, un Theoreme plus général qu'il m'a envoyé. Tout le reste

eſt aſſez conforme à l'original, ſi l'on en excepte encore la meſure des Solides, des Cônes tronqués & des Segmens de ſphere, à laquelle j'ai joint des démonſtrations plus étendues.



ÉLEMENS



ELEMENS DE GEOMETRIE,

LIVRE PREMIER.

DEFINITIONS.

1. LA Géométrie eſt cette ſcience qui a pour objet la meſure de l'étendue.

L'étendue eſt diſtinguée en longueur, largeur & hauteur.

2. Une ligne eſt une grandeur qui a de la longueur ſans largeur ni hauteur, comme AB

A ——————— B.

Les points ſont les limites, les extrémités d'une ligne, ils n'ont aucune des dimenſions de l'étendue.

3. Une ſurface eſt une gran-

deur large & longue, mais qui n'a point d'épaiſſeur, telle que C.

C

Les extrémités d'une ſurface ſont des lignes.

4. Une ligne droite eſt celle qui étant menée d'un point à un autre ne ſe détourne ni à droite, ni à gauche, & qui eſt la plus courte que l'on puiſſe mener entre ces deux points, comme AB

A B

5. Un angle eſt l'inclinaiſon de deux lignes droites AB, BC, qui ſe rencontrent l'une & l'autre dans un point B,

A
B
C

ou l'ouverture formée par l'inclinaiſon de AB ſur BC, qui ſe rencontrent en B.

6. Lors qu'une ligne droite CD tombe ſur une autre AB, & que les angles CDA, CDB, qu'elle fait de part & d'autre ſont égaux entr'eux, cette ligne CD eſt dite perpendiculaire à AB, & ces an-

gles ſont appellés angles droits.

C

A D B

7. Un angle aigu eſt celui qui eſt plus petit qu'un droit, comme BEC.

E B

C

8. Un angle obtus eſt celui qui eſt plus grand qu'un droit, comme FED.

F

E

D

9. La diſtance d'un point à un autre, eſt meſurée par la ligne droite qui les joint.

10. La diſtance d'un point à une ligne, eſt ſa diſtance au point de cette ligne dont il eſt le plus près.

11. Deux lignes droites AB, CD, ſont dites paralleles lorſque des perpendiculaires AC, BD, terminées par ces deux lignes, ſont égales entr'elles quelque part qu'on les prenne.

C D

A B

12. Une figure plane eſt celle que toucheroit immédiatement dans toute ſa longueur, une ligne droite menée d'une de ſes extrémités à l'autre quelque part qu'on la menat.

13. Une figure plane rectiligne eſt celle qui eſt terminée de toute part par des lignes droites.

14. Toutes les figures planes rectilignes terminées par trois lignes droites, ſont des triangles.

15. Un triangle équilateral eſt celui dont les trois côtés ſont égaux, comme A.

16. Un triangle iſocelle eſt celui dont deux côtés ſeulement ſont égaux, comme B.

17. Un triangle ſcalene eſt celui dont les trois côtés ſont inégaux, comme C.

18. Un triangle rectangle eſt celui qui a un angle droit ACB, & le côté AB oppoſé à cet angle s'appelle l'hypoténeuſe.

19. Un triangle obtuſangle eſt celui qui a un angle obtus.

20. Un triangle acutangle eſt celui qui a un angle aigu.

21. Toute figure plane terminée par quatre lignes droites eſt un quadrilataire.

22. Un quadrilataire dont les côtés oppoſés ſont paralleles eſt un parallelograme.

23. Un parallelograme dont les angles ſont droits eſt un rectangle.

24. Un quarré eſt un rectangle dont les quatre côtés ſont égaux, auſſi bien que les Angles.

25. Un rhombe eſt un parallelograme dont les quatre côtés ſont égaux, mais dont les angles ne ſont pas droits.

26. Tous les autres quadrilataires ſont appellés des trapezes.

27. Une ligne droite CB, qui dans un quadrilataire ACEB va d'un angle oppoſé C à l'autre B, eſt appellée la diagonale du quadrilataire.

E C A B D

28. Le côté AB ſur lequel un parallelograme ABEC, ou un triangle BCA eſt ſuppoſé appuyé, eſt appellé la baze du parallelograme, ou du triangle, & la perpendiculaire CD qui tombe ſur la baze AB en partant de l'angle oppoſé C en eſt la hauteur.

29. Un cercle eſt une figure plane terminée de toutes parts par une ligne courbe qu'on appelle la circonférence, & qui eſt par-tout également éloignée d'un point dans le cercle appellé le centre.

30. Le rayon d'un cercle eſt une ligne droite tirée de ſon centre à ſa circonférence.

DEMANDES.

1. Qu'on puiſſe mener une ligne droite d'un point à un autre.

2. Qu'on puiſſe continuer & prolonger à volonté une ligne droite.

3. Que d'un centre on puiſſe avec un rayon donné décrire une circonférence de cercle.

4. On demande aussi que l'on accorde comme possible de pouvoir tirer des lignes égales & faire des angles égaux à d'autres ; qu'à un point & à une distance donnée on puisse mener une ligne perpendiculaire ou parallele à une autre ; & enfin qu'on accorde que toute grandeur a ou sa moitié, ou son tiers, ou son quart, ou, &c.

AXIOMES.

1. Les choses égales à une même chose sont égales entr'elles.

2. Le tout est plus grand que sa partie.

3. Le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

4. Si à des choses égales on en ajoûte d'égales, les touts seront égaux.

5. Si des choses égales on en ôte d'égales, les restes seront égaux.

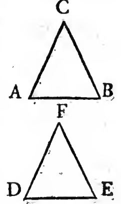
6. Si à des choses inégales, ou si des choses inégales, on ajoûte,

ou on ôte des choſes égales, les ſommes ou les différences ſeront inégales.

7. Tous les angles droits ſont égaux entr'eux.

8. Si l'on prolonge deux lignes droites AC, BD, qui ſont dans un même plan, & qui ne ſont pas paralleles, vers le côté où leur diſtance eſt la moindre, elles parviendront enfin à ſe couper.

9. Si deux lignes droites CA, CB, qui font un angle C, ſont reſpectivement égales à deux autres lignes droites FD, FE qui font auſſi un angle F, & ſi ces deux angles C, F ſont égaux; je dis qu'alors les côtés AB, DE, les angles A, D; B, E, ſeront égaux, & qu'enfin tout le triangle CAB ſera égal au triangle DFE.



Si cet axiome ne paroît pas assez évident de lui-même, il est aisé d'en démontrer la vérité en appliquant le triangle ACB sur DFE, parce qu'alors de l'égalité de l'angle & des côtés supposée, on en concluera que les côtés coincideront dans tous leurs points, & conséquemment que ces deux triangles seront égaux (*a*).

(*a*) M. Sympson a eu d'autant plus raison de mettre cette proposition, qui est la quatriéme du premier Livre d'Euclide, au rang des axiomes, que la démonstration que Euclide lui-même en donne ne se tire d'aucune connoissance préliminaire; toutes les propositions qu'on démontre par la méthode de la superposition ont ce même avantage, & peuvent être mises au rang des axiomes; la huitiéme d'Euclide, qui n'est que l'inverse de la quatriéme, est aussi dans le même cas.



OBSERVATIONS.

UNE Propoſition comprend ce que l'on doit faire, ou ce que l'on doit démontrer; dans le premier cas elle s'appelle un Probléme, & dans le ſecond Théoreme.

On appelle Lemme une vérité qu'on démontre ſeulement pour éclaircir une propoſition qui ſuit.

Un Corollaire eſt une vérité qui ſuit d'une autre déja démontrée, & qui n'en eſt qu'une conſéquence néceſſaire.

Le Scholie renferme des remarques & des obſervations, ſur quelque vérité qui a précédé.

EXPLICATION DES SIGNES.

Le ſigne = eſt le ſigne de l'égalité, & marque que les grandeurs entre leſquelles il eſt placé ſont égales.

Le ſigne < marque que la quantité qui le précéde eſt plus grande que celle qui le ſuit.

Le ſigne > marque préciſément le contraire du précédent.

Le ſigne + eſt celui de l'addition, ainſi A + B ſignifie qu'il faut ajoûter A avec B.

Le ſigne − eſt le ſigne de la ſouſtraction, ainſi A − B marque qu'il faut ſouſtraire B de la quantité A.

Lorſqu'un Nombre précéde une quantité quelconque, il marque qu'il faut prendre cette quantité autant de fois qu'il y a d'unités dans ce nombre; on l'appelle le Coefficient de cette quantité, ainſi 5 A marque qu'il faut prendre cinq fois la valeur de A; & le nombre 5 eſt le coefficient.

Lorſque différens angles ſe terminent à un même point comme en B, chaque angle eſt déſigné par trois lettres, dont celle du milieu marque le concours des deux lignes qui le forment.



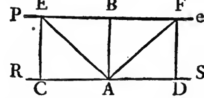
Si dans quelque démonstration vous trouvez différentes grandeurs jointes ensemble par le signe de l'égalité, ou par quelqu'autre, entre deux parentèses, les conclusions qu'on en tire valent de la premiere à la derniere; ainsi $AB\ (BC)\ (CD) = DE\ (EF)\ (FG)$, *veut dire que* $AB = FG$.

Lorsqu'il y a deux nombres dans une citation, le premier indique la proposition & le second le livre.



THÉOREME PREMIER.

Une droite AB *perpendiculaire à une des deux lignes paralleles* RS, Pe, *l'est aussi à l'autre.*



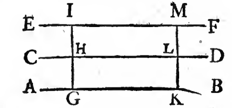
Car soit BA perpendiculaire à RS & prenez AD=AC [a]; soit aussi CE, DF perpendiculaires à RS [a], & tirez AE, AF [b] dans les triangles AEC, AFD, le côté AC= [c] AD: CE= [d] DF, & l'angle ACE = [e] ADF, donc AE= [f] AF & l'angle CAE= [f] DAF, donc si on les ôte des angles égaux CAB, DAB [g], il restera EAB=FAB. Présentement dans les triangles EAB, FAB, puisque EAB=FAB, que EA=AF & que AB est commun, l'angle EBA sera= [f] FBA, donc AB est perpendiculaire à Pe [h].

Ce qu'il falloit démontrer.

a *Dema.* 4.
b *Dema.* 1.
c *Hipot.*
d *Défin.* 11.
e *Défin.* 6. & 11.
f *Axiom.* 9.
g *Axiom.* 7.
h *Défin.* 6.

THÉOREME II.

Deux droites AB, EF, *paralleles à une troisiéme* CD, *sont paralleles entr'elles.*



Soient les droites GHI, KLM, perpendiculaires à CD & rencontrant AB, & EF dans les points G, K, I, M [a] : alors GH étant = KL & HI=LM [b] GI, sera = [c] KM; donc puisqu'elles sont perpendiculaires à CD [d] elles le seront aussi à AB & à EF [e], & conséquemment AB & EF seront paralleles [b].

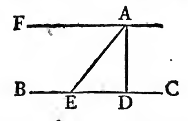
C. Q. F. D.

a *Dem.* 4.
b *Défin.* 11.
c *Axiom.* 4.
d *Hipot.*
e 1. 1.

THÉOREME III.

D'un même point A *on ne peut tirer qu'une seule perpendicu-*

laire AD, *à une droite* BC.

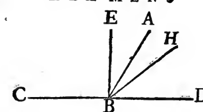


Soit s'il eſt poſſible AE auſſi perpendiculaire à BC, & menez AF parallele à BC[a]; alors l'angle EAF ſera droit, & conſéquemment[b] = DAF qui eſt auſſi droit par la conſtruction, c'eſt-à-dire, la partie égale au tout ce qui eſt impoſſible[c]. Donc, &c.

a *Dema.* 4.
b 1. & *Axiom.* 7.
c *Axiom.* 2.

THÉOREME IV.

Une ligne droite AB *tombant ſur une autre droite* CD, *fait avec elle deux angles* ABC, ABD, *qui pris enſemble équivalent à deux droits.*



Si les angles ABC, ABD font égaux, il eſt évident qu'ils font deux angles droits [a]; s'ils font inégaux foit BE perpendiculaire à CD [b], alors ABC = à un angle droit + ABE [c] & ABD = à un angle droit − ABE [c], donc ABC + ABD = deux angles droits + ABE − ABE; or ces deux dernieres quantités étant égales à zero, puiſqu'elles ſe détruiſent mutuellement, reſte ABC + ABD = deux angles droits [d].

C. Q. F. D.

[a] *Défin.* 6.
[b] *Dema.* 4.
[c] *Axiom.* 3.
[d] *Axiom.* 4.

COROLLAIRE I.

De-là tous les angles qui ſe font au point B d'un même côté de la ligne CD, font égaux, pris tous enſemble, à deux droits [c].

COROLLAIRE II.

De-là auſſi ſi une droite AB tombe ſur

ſur le point de concours de deux autres BC, BD, & qu'elle faſſe avec elles à ce point deux angles égaux à deux droits, ces lignes BC, BD, ſeront dans une même direction & ne formeront qu'une même ligne droite continuée. Car qu'elles faſſent, s'il eſt poſſible, deux droites différentes, & prolongeant CB en H, alors l'angle ABC + ABH ſeroit égal à ABC + ABD[d], ce qui rendroit ABH = ABD[e], ce qui eſt abſurde[f].

d *Axiom.* 1. & 4. 1.
e *Axiom.* 5.
f *Axiom.* 2.

THEOREME V.

Les angles DEB, AEC, *oppoſés au ſommet & formés par les droites* AB, CD, *qui ſe coupent mutuellement au point* E, *ſont égaux.*

D B E A C

Car AED+AEC= deux droits[a]; = AED + DEB, & ſi vous en ôtez

a 4. 1.

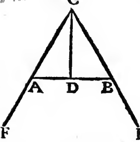
AED commun, reſtera AEC = DEB [b].

b *Axiom.* 5.

C. Q. F. D.

THEOREME VI.

Les angles A & B *ſur la baſe d'un triangle iſocelle* ACB *ſont égaux entre eux, ainſi que ceux qui ſont ſous la baſe.*



Car que CD qui rencontre la baſe en D, diviſe en deux parties égales ACB [a], alors le triangle ADC = BDC, car AC [b] = CB, l'angle ACD = [c] DCB & le côté DC eſt commun; donc l'angle A = l'angle B [d]. De plus, puiſque CAD + DAF ſont égaux à deux droits,

a *Dem.* 4.
b *Défin.* 16.
c *Conſtr.*
d *Axiom.* 9.

& que CBD + DBE sont aussi égaux à deux droits [f], CAD + DAF = CBD + DBE [g]; mais nous venons de dire que CBD = CAD donc DAF = DBE [h].

f 4. t.
g Axiom. 1
h Axiom. 1

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

De-là il suit qu'une ligne droite qui tombe du sommet d'un triangle isocelle sur sa base en divisant en deux parties égales l'angle du sommet de ce triangle, divise aussi la base en deux parties égales, & lui est perpendiculaire [a].

a Défin. 6

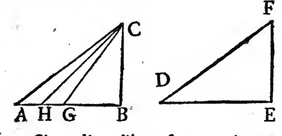
COROLLAIRE II.

Il suit de-là encore que tout triangle équilateral est aussi équiangle.

THEOREME VII.

Si deux triangles rectangles ABC, DEF, *ont leurs hypoteneuses* AC, DF, *& leurs côtés* BC, EF, *égaux*

l'un à l'autre, leurs autres côtés BA, ED, *seront aussi égaux.*



Si on dit qu'ils ne sont pas égaux soit AB le plus grand ; & prenez sur AB la partie BG = au plus petit DE ; menez CG, & CH qui divise en deux également l'angle GCA [a] ; puisque BG = ED, BC = EF [b] & B=E [c] CG sera [d] = FD = [b] AC, donc ACG sera un triangle isocelle [e], & par le Corollaire I. du Théoreme précédent, CH sera perpendiculaire à AB, ce qui est impossible [f].

a *Dema.* 4. b *Const.* & *Hipo.* c *Axiom.* 7. d *Axiom.* 9. e *Défin.* 16. f 2. 1.

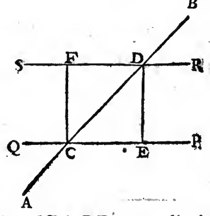
COROLLAIRE.

Il suit de-là que puisque AB = DE, le triangle ABC sera entierement = au triangle DEF [a].

a *Axiom.* 9.

THEOREME VIII.

Les angles PCD, SDC, *formés par une droite* AB *qui coupe deux autres droites paralleles* SR, QP, *s'appellent angles alternes & sont égaux entre eux.*



Soit CF & DE perpendiculaires à PQ, & qui le seront aussi à RS [a] : dans les triangles CED, CFD, les angles F & E sont droits, les côtés FC, DE [b] sont égaux, le côté CD est commun, donc ces deux triangles sont égaux [c] donc l'angle FDC = ECD. *C. Q. F. D.*

a 1. 11
b Défin. 11.
c Coroll. 7.

COROLLAIRE I.

a 5. 1. b 8. 1. c Axiom. 1

Puisque BDR = [a] FDC = [b] BCE; BDR sera = [c] BCE; il paroît delà qu'une ligne droite qui coupe deux droites paralleles fait les angles du même côté au-dessus de ces lignes égaux entre eux.

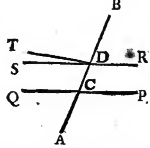
COROLLAIRE II.

e 4. 1. f Axiom. 4.

De plus puisque ECD = [b] FDC & que FDC+RDC=deux droits[e]; ECD + RDC sont aussi = [f] deux droits : ainsi si une droite coupe deux paralleles, les angles internes qu'elle forme du même côté sont = deux droits.

THEOREME IX.

Si une droite AB *qui tombe sur deux autres droites* PQ, RS, *fait les angles alternes* PCD, SDC *égaux, ces deux lignes seront paralleles.*



Car soit, s'il est possible, TD (& non SD) parallele à QP, alors SDC = [a] DCP = TDC[b], c'est-à-dire, la partie égale au tout; ce qui est absurde[c].

a Hipot.
b 8. 1.
c Axiom. 4.

C O R O L L A I R E.

Il suit de-là que si les angles BDR, BCP sont égaux, les lignes RS, PQ seront paralleles, parce que BDR étant = SDC [a] BCP sera = SDC [c].

a 5. 1.
c Axiom. 1.

THEOREME X.

Si l'on prolonge le côté AB *d'un triangle* ABC, *l'angle extérieur* CBD *formé par ce prolongement,*

est égal aux deux intérieurs opposés A & C pris ensemble.

Menez BE paralleles [a] à AC, alors l'angle ACB = CBE [b] & CAB = [c] EBD, donc ACB + CAB = CBE + EBD [d] = CBD [e].

C. Q. F. D.

a Dema. 4.
b 8. 1.
c Cor. 1. 8. 1.
d Axiom. 4.
e Axiom. 3.

COROLLAIRES.

1. De-là il suit que les trois angles d'un triangle sont égaux à deux droits; car par ce Théoreme C+A=CBD, donc si on y ajoute CBA, on aura C + A + CBA [a] = CBD + CBA = [b] deux droits.

a Axiom. 4.
b Cor. 1. 4. 1.

2. Donc si deux angles d'un triangle sont égaux aux deux angles d'un autre triangle, on en conclura l'égalité du troisiéme [c].

c Axiom. 5.

3. Si un angle d'un triangle est égal à un angle d'un autre triangle, la somme des deux angles restans sera la même.

4. Si un angle d'un triangle est

droit, les deux autres pris ensemble seront égaux à un droit.

5. Si un angle est droit ou obtus, les deux autres seront aigus.

6. L'angle extérieur CBD est plus grand qu'aucun des deux intérieurs opposés C ou A, puisqu'il est égal à tous les deux pris ensemble.

7. L'angle d'un triangle équilateral est égal à $\frac{2}{3}$ d'un angle droit[a].

8. Si les angles verticaux de deux triangles isocelles sont égaux, les angles à la base seront aussi égaux[b].

a Cor. 2. 6. 1.

b 6. 1.

THEOREME XI.

Les quatre angles intérieurs d'un quadrilatere ABCD *sont égaux à quatre angles droits.*

Soit la diagonale AC tirée; alors puisque les trois angles du triangle ABC sont égaux à deux droits[a], ainsi

a Cor. 1. 10. 1.

que ceux du triangle ADC [a]; il suit que la somme de tous les angles de ces deux triangles, qui est la même que celle des angles du quadrilatere, est égale à celle de quatre angles droits [b].

b Axiom. 4.

COROLLAIRE I.

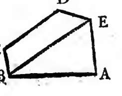
De-là il suit que si trois angles d'un quadrilatere sont droits, le quatrieme sera droit aussi.

COROLLAIRE II.

De plus si deux des quatre angles d'un quadrilatere sont égaux à deux droits, les angles restans seront égaux aussi à deux droits.

THEOREME XII.

Tous les angles intérieurs d'une figure de cinq côtés ABCDE *sont égaux à six angles droits.*



Menez BE; alors par le théoreme précédent les angles du qua-

drilatere BCDE sont égaux à quatre droits [a], ceux du triangle BAE sont égaux à deux droits [b], donc ceux de l'entiere figure ABCDE sont égaux à six droits [c].

C. Q. F. D.

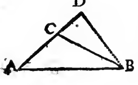
a 11. 1.
b Cor. 1. 10. 1.
c Axiom. 1.

SCHOLIE.

On verra, en procédant de la même maniére, que tous les angles intérieurs d'un poligone d'un nombre de côtés quelconque, seront égaux à deux angles droits de plus que ceux du poligone qu'il surpasse d'un côté.

THEOREME XIII.

Dans tout triangle ABC *le plus grand côté* AB *soutend le plus grand angle* ACB.



Dans AC prolongé, s'il est nécessaire, prenez AD=AB & me-

nez BD ; ABC + ACB = ABD + ADB[a] = 2 ABD[b]. .Puifque par la fuppofition ABC eft moindre que ACB, il fera auffi moindre que la moitié de leur fomme, ou que ABD[c] ; ainfi BD tombant hors du triangle AC doit être moindre que AD[c], ou que AB.

C. Q. F. D.

On prouvera auffi de la même maniere que CB eft moindre que AB.

a Cor. 3. 30. 1.
b 6. 1.
c Axiom. 2.

THEOREME XIV.

D*ANS tout triangle* ABC *le plus grand angle* ACB *eft foutendu par le plus grand côté* AB.

C
A B
D

Du côté AB qui eft le plus grand côté par l'hypotèfe, retranchez AD = AC & menez CD, le triangle DAC étant ifocélle[a], les angles ACD, ADC font égaux[b];

a Conft.
b 6. 1.

donc ACB qui eſt plus grand que ACD [c], ſera auſſi plus grand que ſon égal ADC, & à plus forte raiſon que ABC [d] qui eſt plus petit que lui.

c *Axiom.* 2.

d *Cor.* 6. 10. 1.

C. Q. F. D.

THEOREME XV.

Deux côtés quelconques AC, BC *d'un triangle* ABC, *pris enſemble, ſont plus grands que le troiſiéme côté* AB.

D C A B

Sur BC prolongé prenez CD = AC & menez DA; les angles CDA, DAC [a] ſont égaux, donc BAD qui eſt plus grand que DAC [b] eſt auſſi plus grand que CDA, donc enfin BD (BC + AC) eſt plus grand que AB [c].

a *c.* 12

b *Axiom.* 21

c 13. 1.

C. Q. F. D.

THEOREME XVI.

De toutes les lignes droites qui tombent d'un point donné P *sur une droite indéfinie* RS , *la plus courte* PA *est celle qui est perpendiculaire à* RS , *& de toutes les autres ,* BP *qui est plus près de la perpendiculaire est plus courte que toute autre* PC *qui en est plus éloignée.*

Car BAP étant droit [a] ABP sera aigu [b] , donc $AP > BP$ [c] ; de plus puisque $CBP <$ qu'un angle droit [d] $< BCP$ [e] , PC sera $< BP$ [f].

C. Q. F. D.

SCHOLIE.

Puisque par le précédent théoreme on a vû qu'on ne pouvoit pas mener du même point P sur la ligne RS , & d'un même côté de la perpendiculaire deux droites

a *Hipot.*
b *Cor.* 5. 10. 1.
c 13. 1.
d *Cor.* 6. 10. 1.
e *Cor.* 5. 10. 1.
f 13. 1.

égales, il eſt évident qu'on ne peut pas de la même ligne droite RS mener trois droites égales à un même point P ; on concevra aiſément par-là d'où vient qu'on ne peut pas faire paſſer (comme on le verra dans la ſuite) une circonférence de cercle par trois points donnés dans une même ligne droite ; car tous les rayons du cercle ſont égaux : or c'eſt ce qui ne ſeroit pas vrai ſi l'on pouvoit faire paſſer la circonférence par trois points donnés dans une même ligne droite.

THEOREME XVII.

Si deux triangles ABC, ADB, *ſont ſur la même baſe* AB, *& que l'un d'eux* ADB *ſoit entierement renfermé dans l'autre* ABC, *les côtés* AD, BD *de l'intérieur pris enſemble ſeront moindres que les côtés* AC, BC *de l'autre ; mais l'angle* ADB *qu'ils comprennent eſt plus grand que l'angle* ACB *de l'extérieur.*

Soit AD prolongé jufqu'à ce qu'il rencontre CB en E, l'angle $ADB < BED$, puifque c'eft l'angle extérieur ; par la même raifon $BED < C$, donc $ADB < C$; de plus puifque $AC + CE <$ [a] AE ($AD + DE$) & que $BE + DE <$ [a] DB, donc $AC + CE + BE + DE < AD + DE + DB$, & en ôtant DE qui eft commun à ces deux quantités, on aura $AC + CE + BE =$ $AC + CB <$ [b] $AD + DB$.

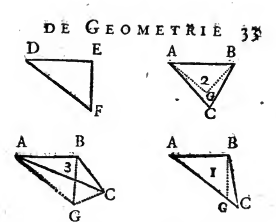
C. Q. F. D.

[a] 15. 1.

[b] Axiom. 6.

THEOREME XVIII.

Si les deux côtés AB, BC *d'un triangle* ABC *font égaux aux deux côtés* DE, EF *d'un autre triangle* DEF, *chacun à chacun, & que l'angle* B *compris par les deux premiers foit plus grand que l'angle* E *compris par les deux derniers, la bafe* AC *du premier triangle* ABC *fera plus grande que la bafe* DF *du dernier.*



Faites ABG = E & menez BG = EF = BC [a] il peut arriver trois cas; où le point G tombera sur la ligne AC, ou il tombera au-dessous de AC, ou enfin il tombera au-dessus.

a *Dem.* 1. & 4.

Premier cas: si le point G tombe sur AC, alors ABC étant < [b] ABG = E par l'hypotese, il est évident que AC < [c] AG.

b *Axiom.* 8.

c 13. 1.

Second cas: si G tombe au-dessous de AC joignez AG, alors BC+AC étant < [d] AG + BG, si vous ôtez de part & d'autre BC = [e] BG restera AC < AG [f].

d 17. 1.

e *Hipot.*

f *Axiom.* 6.

Troisiéme cas: si G tombe au-dessus de AC joignez AG & GC, maintenant le triangle GBC étant

isocelle par la construction, les angles BCG, BGC sur la base sont égaux [j], donc AGC qui excéde BGC doit aussi excéder BCG qui lui est égal, & à plus forte raison ACG qui n'en est qu'une partie ; ainsi AC doit être plus grand que AG [l] mais DF = [m] AG, donc enfin dans chaque cas AC doit être plus grand que DF.

j 6. 1.

l 13. 1.

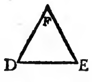
m *Const.*

C. Q. F. D.

THEOREME XIX.

Si les trois côtés AB, BC, AC *d'un triangle* ABC *sont égaux aux trois côtés* DE, EF, DF *d'un autre triangle* DEF, *chacun à chacun, les angles compris par les côtés égaux seront aussi égaux.*





S'il étoit possible que l'angle C,

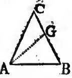
par exemple, fût plus grand ou moindre que son correspondant F; alors par le Théoreme précédent le côté AB seroit ou plus grand, ou moindre que le côté DE, ce qui est contre la supposition.

COROLLAIRE.

De-là les triangles qui sont équilateraux entre eux, sont aussi équiangles & égaux.

THEOREME XX.

Si dans les triangles équiangles ABC, DEF *deux côtés* AB, DE, *communs aux angles égaux, sont égaux l'un à l'autre, les autres côtés correspondans seront aussi égaux.*



Si vous niez que les autres côtés sont égaux, supposons que ce soit BC qui est plus grand que EF, re-

a Dem. 4. tranchez de BC une partie BG =[a] EF & menez AG ; les triangles ABG, DEF ayant AB = DE, BG

b Hipot. = EF & l'angle B =[b] E, ils auront

c Axiom. 9. l'angle BAG =[c] D ; mais D =[b] BAC, donc BAG =[d] BAC ce qui

d Axiom. 1. est impossible.

C. Q. F. D.

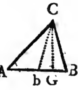
COROLLAIRE.

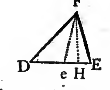
De-là il est évident que les triangles équiangles, dont un des côtés correspondans de l'un est égal à

a Cor. 19. 1. celui de l'autre, sont égaux [a].

THEOREME XXI.

Si dans les deux triangles ABC, DEF *les deux côtés* AC, BC *de l'un sont respectivement égaux aux deux côtés* DF, FE *de l'autre, que les angles* A, D *opposés aux côtés égaux* CB, FE *soient égaux, & que les autres angles* B *&* E *à la base soient ou tous deux aigus, ou tous deux obtus, ces deux triangles seront égaux à tous égards.*





Supposons que les angles B & E soient tous les deux aigus & soient CG & FH perpendiculaires à AB, DE, il est évident que GC tombera dans le triangle, parce que l'angle AGC étant plus grand que B par la construction, il doit être extérieur au triangle CGB. Il en est de même de FH; maintenant puisque A = [a] D, AGC = DHF [b] & AC = [a] DF les triangles AGC, DFH seront égaux [c]; ainsi AG = DH & CG = FH; de même CB = [a] FE, CG = FH, donc GB = [d] HE, donc AG + GB = AB = DH + HE = DE [e], donc enfin les triangles ACB, DFE étant mutuellement équilateraux, ils sont égaux [f].

On démontrera ce Théoreme de la même maniere si les angles B & E au lieu d'être aigus sont tous deux obtus, comme dans les trian-

[a] *Hipot.*
[b] *Axiom.* 7.
[c] *Cor.* 10. 1.
[d] 7. 1.
[e] *Axiom.* 4.
[f] *Cor.* 19. 1.

gles AbC, DeF, en abaissant sur les côtés Ab, De, prolongés, les perpendiculaires CG, FH qui tomberont hors des triangles; car dans les triangles rectangles CbG, FeH, Cb, CG sont égaux à Fe, FH, donc bG =[a] eH, donc AG−Gb = Ab = DH − He = De[b].

a 7. 1.
b Axiom. 5.

C. Q. F. D.

THEOREME XXII.

Si les deux angles A, B *d'un triangle* ABC *sont égaux, les côtés* BC, AC *qui les soutendent seront aussi égaux.*

C

A D B

Soit la ligne CD qui divise en deux parties égales l'angle ACB, alors les triangles ACD, DCB, étant équiangles[a], & le côté CD étant commun, on aura AC =[b] BC. *C. Q. F. D.*

a Hipot & Cor. 2. 10. 1.
b 20. 1.

COROLLAIRE.

De-là on voit que tout triangle équiangle est aussi équilateral.

THEOREME XXIII.

Les côtés opposés AB, DC, *& les angles* B, D *opposés de tout parallelograme sont égaux, & la diagonale* AC *le divise en deux parties égales.*

Les côtés AB, DC, & DA, CB étant paralleles [a], l'angle BAC = [b] DCA ; BCA = [b] DAC & AC est commun aux deux triangles ADC, ABC, donc ils sont entierement égaux [c], donc DAC + CAB étant = BCA + ACD, on aura DAB = BCD.

a Défin. 22.
b 8. 1.
c 20. 21

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

De-là il suit que si dans un parallelogramme il y a un angle droit B, les autres trois seront aussi droits ; car D étant = B par ce Théoreme il est manifestement droit, donc la somme de deux au-

tres angles A, C étant égale à deux angles droits (par le Cor. II. du Théor. XI.) il est évident qu'ils seront droits l'un & l'autre.

THEOREME XXIV.

Toute figure de quatre côtés ABCD, *dont les côtés opposés sont égaux, est un parallelogramme.*

D C A B

Soit tirée la diagonale AC, alors les triangles DCA, CAB sont équilateraux, & conséquemment équiangles [a], donc AB est parallele à DC, & AD à BC [b].

C. Q. F. D.

[a] Cor. 19. 1.
[b] 9. 1.

THEOREME XXV.

Les lignes AD, BC *qui joignent les extrémités des deux lignes* DC, AB *égales & paralleles, sont elles-mêmes égales & paralleles.*

D C A B

Soit tirée la diagonale DB, AB & DC étant paralleles [a], l'angle CDB = ABD [b], & de plus BA étant = [a] DC & BD étant commun il s'ensuit, que les triangles CDB, ADB sont égaux [c], donc ADB étant = CBD, les lignes AD, BC sont paralleles & égales [d].

a Hipot.
b 8. 1.
c Axiom. 9.
d 9. 1.

THEOREME XXVI.

Si sur les côtés d'un quarré ABCD *on prend quatre points* E, F, G, H, *également distans des angles de ce quarré, la figure* EFGH *formée par les lignes qui joignent ces quatre points, sera un quarré.*

A E D F H B G C

Puisque par la construction AE, HB, GC, DF sont égaux, ED, FC, BG, AH seront aussi égaux [a]; & tous les angles A, D, C, B étant droits [b],

a Axiom. 5.
b Hipot.

les côtés HE, EF, GH, FG doivent être égaux [c].

c *Axiom.* 9.

De plus l'angle DEH, ou DEF + FEH [d] étant = A + AHE [e] & DEF étant par la premiere partie de cette démonstration = AHE, il reste FEH = [f] A, donc par le Corollaire du Théoreme XXIII, la figure HEFG est un quarré.

d *Axiom.* 3.
e 10. 1.
f *Axiom.* 5.

THEOREME XXVII.

Si sur le côté AB *d'un triangle* ABC *on prend les points*, D, H *à une égale distance, d'un point* F *pris sur le même côté, & qu'on tire* DEM, FG, HNI *paralleles à la base* BC, *les parties* GE, GI *qu'elles couperont sur le côté* AC, *seront aussi égales entre elles.*



Tirez par le point G une parallele à AB qui coupe DM, HI en M & en N : dans les triangles EGM, NGI les angles EGM,

NGI font égaux[a], ainsi que EMG, GNI[b], de plus GN =[c] (FH) = (FD[d]) = [c] GM, donc GE = GI[e]. *C. Q. F. D.*

a 5. 1.
b 8. 1.
c 23. 1.
d *Hipot.*
e 20. 1.

COROLLAIRE I.

Il paroît de-là que si on divise le côté d'un triangle en un nombre quelconque de parties égales, & que des points de division on mene des lignes droites paralleles à la base, ces droites diviseront l'autre côté en un même nombre de parties égales ; de même si ces droites divisent les deux côtés du triangle en un même nombre de parties égales, elles seront paralleles à la base.

COROLLAIRE II.

De-là on tire aussi que si deux droites FG, HI coupant les deux côtés d'un triangle sont paralleles, & qu'on tire une autre droite DE de maniere que DF soit = FH & GE = GI, cette droite DE sera parallele aux deux précédentes.

THEOREME XXVIII.

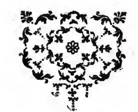
Si on divise en deux parties égales tous les côtés d'un quadrilatere quelconque ABCD, *la figure* EFGH *formée par les droites qu'on menera par ces points de division, sera un parallelogramme.*

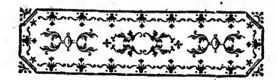
D G C
H F
A E B

Tirez les diagonales AC, DB, puisque EF, HG, sont paralleles à [a] AC, elles le sont entre elles [b]; de même que les lignes HE, GF, donc HGEF est un parallelogramme [c]. *C. Q. F. D.*

[a] Cor. 1. 27. 1.
[b] 2. 1.
[c] Défin. 22.

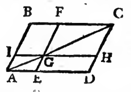
Fin du I. Livre.





ELEMENS
DE GEOMETRIE,
LIVRE SECOND.

DEFINITIONS.



1. SI dans un parallelogramme ABCD on mene les deux lignes droites IH, EF paralleles à ses côtés & qui coupent la diagonale CA dans le même point G, on aura quatre parallelogrammes, dont les deux CG, GA sont dits parallelogram-

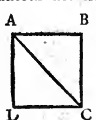
mes au tour de la diagonale, & les deux autres GB, DG ſont appellés les complemens.

2. On dit qu'un rectangle AC eſt compris ſous les droites AB, BC, dont l'une eſt ſa baſe & l'autre ſa hauteur.

Le rectangle compris ſous les deux lignes AB, BC, eſt ſouvent exprimé ainſi AB×BC; celui qui eſt compris ſous les lignes AB+BC & AB−BC, c'eſt-à-dire, ſous la ſomme des lignes AB, BC & ſous leur différence eſt exprimée par $\overline{AB+BC}\times\overline{AB-BC}$, c'eſt ainſi que l'on doit entendre toutes les expreſſions ſemblables; mais lorſque la figure dont on veut avoir l'expreſſion eſt un quarré, on ſe contente de placer un 2 à la droite des lettres qui expriment un de ſes côtés; ainſi AB^2 exprime le quarré dont le côté eſt AB; on appelle ce chiffre ainſi placé ſur la droite de ces lettres l'Expoſant de

la grandeur qu'elles expriment, au lieu que s'il est placé sur la gauche au-devant de ces mêmes lettres, on l'appelle le Coéficient.

On remarquera que la hauteur d'un parallelogramme quelconque est la perpendiculaire qui tombe d'un des angles sur la base, & qu'elle n'est le côté même du parallelogramme que lorsqu'il est rectangle; il en est de même de la hauteur des triangles.

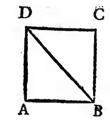


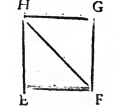


Ainsi la hauteur du parallelogramme ABCD & du triangle ADB, est la perpendiculaire DE; & celle du parallelogramme & du triangle rectangle ABCD, ADC, est le côté même AD.

THÉOREME PREMIER.

Les rectangles BD, FH *compris sous des lignes égales sont égaux.*





Tirez les diagonales DB, HF, puisque AB=EF ; AD=EH & l'angle A= à l'angle E [a], les triangles DAB, HEF seront égaux [b], on verra de même que DCB= HGF ; donc tout le rectangle DABC=HEFG [c].

C. Q. F. D.

a *Hipot.* b *Axiom.* 1. c *Axiom.* 1.

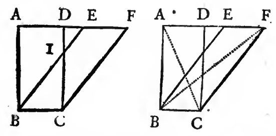
COROLLAIRE.

De-là tous les quarrés dont les côtés sont égaux, sont aussi égaux entre eux.

THEO-

THEOREME II.

Les parallelogrammes ABCD, BCFE *qui sont sur même base* BC, *& entre mêmes paralleles* BC, AF *sont égaux.*



Car puisque l'angle F = BEA [a] & CDF = A [a] les triangles FDC, EAB sont équiangles [b], & de plus ils sont égaux puisque CF = BE; donc ôtant la partie DIE qui leur est commune, il restera le trapeze CIEF = au trapeze BADI [c], & leur ajoutant à chacun le triangle BCI on aura le rectangle BEFC = au rectangle ABDC [d].

a *Cor.* 1. 8. 1.

b *Cor.* 2. 10. 1.

c *Axiom.* 5. 1.

d *Axiom.* 4. 1.

C. Q. F. D.

D

COROLLAIRE I.

De-là les triangles BAC, BFC, qui ſont ſur une même baſe & entre mêmes paralleles, ſont égaux, puiſqu'ils ſont la moitié des parallelogrammes [a] qui ſont ſur même baſe & entre mêmes paralleles, & qui ſont égaux ſuivant ce Théoreme.

[a] 23. 1.

COROLLAIRE II

Il ſuit de-là & du Théoreme premier, que tous les parallelogrammes ou triangles quelconques qui ont des baſes & des hauteurs égales ſont égaux; & que tout triangle eſt égal à la moitié du parallelogramme qui a même hauteur & même baſe.

THEOREME III.

Les complemens EC, EA, *d'un parallelogramme* AC, *ſont égaux.*

B G A H F E C I D

Car le triangle total DCB = au triangle total DAB [a], & les triangles partiaux DIE, EFB, sont égaux aux triangles partiaux DHE, EGB; donc les parallelogrammes restans IEFC, HEGA, sont égaux [b].

a 13. 1.

b Axiom. 5. 1.

C. Q. F. D.

THEOREME IV.

Si l'on a deux lignes droites AB, BC, *dont l'une* AB *soit divisée en un nombre de parties quelconques* AH, HG, GB, *égales ou inégales; le rectangle compris sous les entieres lignes* AB, BC, *sera égal à la somme de tous les rectangles compris sous l'entiere ligne* BC, *& sous chacune des parties de l'autre* AB.

D F E C

A H G B

Soit ABCD le rectangle compris fous les entieres lignes AB, BC ; & foit HF, GE perpendiculaires à AB, & rencontrant DC en F & en E ; BE, GF, HD feront des rectangles [a] qui auront même hauteur que le rectangle BD [b] ; donc $BE = BC \times GB$; $GF = BC \times GH$; & $HD = BC \times HA$ [c] ; mais $BC \times GB + BC \times GH + BC \times HA = BC \times \overline{GB+GH+HA}$ [d] $= BC \times AB$, donc $BE + GF + HD = BC \times AB$.

a Cor. 23. 1.
b Défin. 11. 1.
c 1. 2.
d Axiom. 3. & 4. 1.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

De-là on tire que le rectangle BE compris fous l'entiere ligne BC, & la partie GB de l'autre ligne AB eft égal au rectangle compris fous les deux lignes totales, moins tous les rectangles compris fous l'entiere ligne BC, & chacune des parties reftantes de l'autre.

THEOREME V.

Si une ligne droite AB *est divisée en deux parties quelconques* AC, BC, *le quarré de la toute* AB *est égal au quarré des deux parties* AC, BC *plus deux fois le rectangle compris sous ces deux mêmes parties* AC, CB.

Soit ABGI le quarré de AB; CBEF celui de CB, & soit les lignes CF, EF prolongées jusques à ce qu'elles rencontrent IG, IA en M & en N.

Puisque AB = BG & BC = BE[a]; AC sera = EG[b], & FN étant égal AC[c] & FM = GE[c], FN sera = FM[d], donc tous les angles de cette figure étant droits[e] il s'ensuit que NM est un quarré fait sur le côté FN = AC, & de plus que FG, AF, sont deux rectangles égaux[f] com-

a *Défin.* 24. 1.
b *Axiom.* 5. 1.
c 23. 1.
d *Axiom.* 1. 1.
e *Cor.* 23. 1.
f 3. 2.

pris sous les lignes AC, BC, donc toute la figure $AG = AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2 AC \times BC$ g.

g *Axiom.* 3. 1.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Il suit de-là aussi que le quarré d'une ligne est égal à quatre fois le quarré de sa moitié, puisque nous avons vû qu'il est égal aux quarrés de deux parties, & à deux rectangles de ces mêmes parties. Or la ligne étant divisée en deux parties égales, les deux quarrés & les deux rectangles deviennent égaux entr'eux [a].

a 1. 2.

COROLLAIRE II.

De-là il suit que si deux quarrés sont égaux, leurs côtés (que l'on appelle aussi leurs racines) sont égaux, & *vice versa*; puisque les lignes inégales AC, BC ont des quarrés inégaux.

THEORÊME VI.

La différence des quarrés ACEH, ABDG, *de deux lignes inégales* AC, AB *est égale à un rectangle compris sous la somme & la différence de ces mêmes lignes.*

Dans EH prolongé prenez HK = AB, tirez KI parallele à EC, & prolongez DG des deux côtés jusques à ce qu'il aille rencontrer IK & EC en I & en F. Puisque par la construction AC + AB = EH + HK = EK, & que AC − AB = AH − AG[a] = HG = KI[b], il s'ensuit que FK est un rectangle compris sous la somme & la différence des deux lignes AC, AB[c]; de plus puisque BD (AB) = HK[d], & que BC (= AC − AB = AH − AG) = HG les rectangles BF, GK seront égaux puisqu'ils

a Axiom. 5. 1.

b 23. 1.

c Défin. 2. 2.

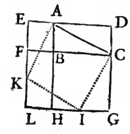
d Constr

ſont compris ſous des lignes égales, & leur ajoûtant à chacun le rectangle FH, on aura CD + FH différence des deux quarrés ACEH, ABDG = FK, rectangle compris ſous la ſomme & la différence des deux lignes AC, AB.

C. Q. F. D.

THEOREME VII.

Le quarré fait ſur l'hypoténuſe AC *d'un triangle rectangle* ABC, *eſt égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés* AB, BC.



Ayant fait les quarrés BG, BE ſur les côtés BC, AB, prolongez leurs côtés HG, GC; EA, EF juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent en D & en L, prenez KL, IG égaux chacun à AE = AB & tirez CI, AK & KI.

Puisque tous les angles autour de B sont droits, [a] FB & BC ne formeront qu'une même ligne droite; il en sera de même de AB, BH [b], de plus ED étant parallele à FC, parallele à LG, & EL étant parallele à AH, parallele à DG [c] la figure DELG sera un parallelograme rectangle dont chacun des côtés = AB + BC [d], donc ce sera un quarré [a] ainsi que la figure ACIK [e]; mais ce dernier quarré est moindre que le précédent DELG des quatre triangles ADC, CGI, ILK, KEA égaux entr'eux [f], moitiés des rectangles BD ou BL [g] & conséquemment égaux tous les quatre pris ensemble à ces deux rectangles, & les deux quarrés BE, BG étant moindres que le grand quarré EDLG, de ces deux mêmes rectangles BL, BD, il s'ensuit que le quarré ACIK = EB + BG [h].

a Défin. 24. 1.
b Cor. 2. 4. 1.
c 2. 1.
d 23. 1.
e 26. 1.
f Axiom. 9. 1.
g Cor. 2. 2. 2.
h Axiom. 5. 1.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

De-là il suit que le quarré formé sur un des côtés qui est au tour de

l'angle droit est égal à la différence des quarrés de l'hypoténuse, & de l'autre côté [a], c'est-à-dire, au rectangle compris sous leur somme & leur différence [i].

i 6. 2.

THEOREME VIII.

Dans tout triangle ABC *où la perpendiculaire* CD *menée du sommet à la base tombe dans le triangle, le rectangle compris sous la somme & la différence des côtés* AC, BC *est égal à celui qui est compris sous l'entiere base* AB *& la différence de ses deux segments* AD, BD.

C A F E D B

a 7. 2.

AC^2 étant $= AD^2 + DC^2$ [a] & $BC^2 = BD^2 + DC^2$ [a], on aura en prenant leur différence, $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$ [b]; mais $AC^2 - BC^2 = \overline{AC+BC} \times \overline{AC-BC}$ [c], &

b Axiom. 5. 1.
c 6. 2.

pareillement $AD^2 - BD^2 = \overline{AD+BD} \times \overline{AD-BD}$[c] $= AB \times \overline{AD-BD}$[d], donc $\overline{AC+BC} \times \overline{AC-BC} = AB \times \overline{AD-BD}$[e].

d Axiom. 3. 1.

e Axiom. 1. 1.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

De-là si on prend AF=BD & qu'on coupe AB en deux parties égales en E, alors AD−BD étant $= AD - AF$[a] $= FD = 2\ ED$[b] il suit que $\overline{AC+BC} \times \overline{AC-BC} = AB \times 2\ ED$[c], c'est-à-dire, que le rectangle sous la somme & la différence des côtés est égal à celui sous l'entiere base, & deux fois la distance de la perpendiculaire au milieu de la base.

THEOREME IX.

Dans tout triangle ABC *où la perpendiculaire menée du sommet sur la base tombe dans le triangle, le quarré d'un côté* AC *est moindre que*

la somme des quarrés de la base, & de l'autre côté de deux fois le rectangle de l'entiere base AB *par le segment* BD *contigu à ce dernier côté.* (Voyez la figure du Théoreme précédent).

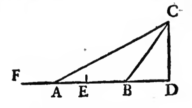
$AC^2 - BC^2$ étant $= (\overline{AC + BC} \times \overline{AC - BC}$ [a] $= AB \times DF$ [b] $= AB \times \overline{AB - 2\,BD}$ [c] $) = AB^2 - AB \times 2\,BD$ [d]; si à la premiere & à la derniere de ces quantités égales on ajoute BC^2, on aura $AC^2 - BC^2 + BC^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB \times 2\,BD$ [e].

C. Q. F. D.

a 6. 2.
b Cor. 8. 2.
c 1. 2.
d Cor. 4. 6.
e Axiom. 4. 1.

THEOREME X.

Dans tout triangle ABC *où la perpendiculaire* CD *tombe hors du triangle, le rectangle sous la somme & la différence des côtés* AC, BC *est égal au rectangle sous l'entiere base* AB *& deux fois la distance* ED *de la perpendiculaire au milieu de la base.*



Dans BA prolongé prenez AF $= BD$ puisque $AC^2 = AD^2 + DC^2$ & $BC^2 = BD^2 + DC^2$ [a] : $AC^2 - BC^2$ sera $= AD^2 - BD^2$ [b] ; mais $AC^2 - BC^2 = \overline{AC+BC} \times \overline{AC-BC}$ [c], & $AD^2 - BD^2 = \overline{AD+BD} \times \overline{AD-BD}$ [c] $= FD \times AB$ [d] $= 2\,ED$ [e] $\times AB$, donc $\overline{AC+BC} \times \overline{AC-BC} = 2\,ED \times AB$ [f].

C. Q. F. D.

a 7. 1.
b *Axiom.* 4. 1.
c 6. 2.
d *Conft.* & 4. 2.
e *Axiom.* 3. 1.
f *Axiom.* 1. 1.

THEOREME XI.

Le quarré du côté AC *qui est opposé à l'angle obtus* B *du triangle* ABC *est égal aux quarrés des deux autres côtés* AB, BC, *plus deux fois le rectangle compris sous l'entiere base* AB, *& la distance* BD *de la perpendiculaire au sommet de l'angle*

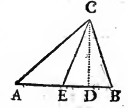
obtus B. (Voyez la figure précédente.) $AC^2 = AD^2 + DC^2$ a & $AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2\,AB \times BD$ b, donc ajoûtant de part & d'autre DC^2 on a $AD^2 + DC^2$ ou $AC^2 = AB^2 + BD^2 + 2\,AB \times BD + DC^2$ c $= AB^2 + BC^2 + 2AB \times BD$, parce $BC^2 = \overline{BD}^2 + DC^2$.

a 7. 2.
b 5. 2.
c Axiom. 4. 1.

C. Q. F. D.

THEOREME XII.

Le double du quarré de CE *menée du sommet du triangle* ACB *au milieu de sa base* AB, *plus le double du quarré de la demie base* AE *ou* BE, *est égal aux quarrés des deux côtés* AC, BC.



Soit CD perpendiculaire à AB; alors $AC^2 = AE^2 + EC^2 + 2\,AE$

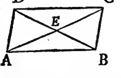
$\times ED^a$, & $BC^2 = BE^2 (AE^2) + EC^2 - 2BE(2AE) \times ED^b$, donc en ajoûtant ces deux valeurs & effaçant les quantités qui se détruisent, on aura $AC^2 + BC^2 = 2AE^2 + 2EC^2$.

C. Q. F. D.

THEOREME XIII.

Les diagonales AC, BD *d'un parallelogramme* ABCD *se coupent mutuellement en deux parties égales, & la somme de leurs quarrés est égale à celle des quarrés des quatre côtés du parallelogramme.*

a 8. 1.
b 23. 1.
c 20. 1.
d 12. 2.



Les triangles DEC, AEB étant équiangles [a], & AB étant = DC[b], AE sera = EC & DE = BE[c].

De plus puisque $2AE^2 + 2ED^2 = AD^2 + DC^2$[d], & que $2AE^2 +$

e Axiom. 4. 1. $2\,EB^2\,(2\,ED^2) = BC^2 + AB^2$ d, on aura $AD^2 + DC^2 + BC^2 + AB^2$

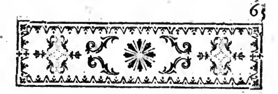
f Cor. 1. 5. 2. $= 4\,AE^2 + 4\,ED^2 =$ e $AC^2 + BD^2$ f.

C. Q. F. D.

Fin du II. Livre.



ELEMENS

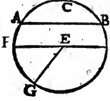


ELEMENS DE GEOMETRIE,

LIVRE TROISIEME.

DEFINITIONS.

1. UNE ligne droite FD qui passe par le centre E d'un cercle, & qui se termine de part & d'autre à sa circonférence, est appellée un diamétre de ce cercle.



2. Un arc de cercle ACB est une portion de la périphérie ou circonférence.

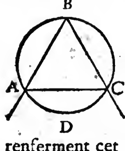
3. La corde ou la soutendante d'un arc est la ligne droite AB, qui joint les deux extrémités de cet arc.

4. Un demi cercle eſt une figure compriſe ſous un diamétre, & la portion de circonférence que le diamétre retranche du cercle entier.

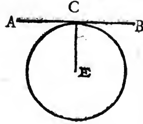
5. Un ſegment de cercle eſt une figure compriſe par un arc ACB, & ſa corde AB.

6. Un ſecteur de cercle FEG eſt une figure terminée par deux lignes droites EF, EG tirées du centre d'un cercle à ſa circonférence, & par l'arc FG qu'elles renferment.

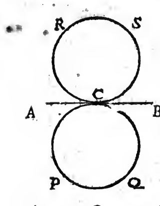
7. Un angle ABC eſt dans un ſegment de cercle ABC lorſque ſon ſommet B étant dans la circonférence, ſes côtés BA, BC paſſent par les extrémités de la corde AC de ce ſegment, & le ſegment ABC eſt dit capable de l'angle ABC.



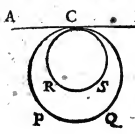
8. On dit qu'un angle ABC appuye ſur l'arc ADC, lorſque ſon ſommet, étant dans la circonférence, ſes côtés renferment cet arc.



9. Une droite AB qui, prolongée indéfiniment, rencontre en un ſeul point la circonférence d'un cercle, & qui fait de part & d'autre des angles droits avec un de ſes rayons EC, eſt dite tangente de ce cercle.



10. Deux cercles PCQ, RCS ſe touchent mutuellement lorſque la ligne AB qui touche l'un des deux au point C, touche l'autre au même point.



11. Deux cercles ſe coupent entr'eux lorſqu'ils tombent mutuel-

lement partie en dedans & partie en dehors l'un de l'autre.

12. On dit qu'une droite est appliquée ou inscrite dans un cercle lorsque ses deux extrémités sont dans la circonférence.

13. Une figure rectiligne est inscrite dans un cercle lorsque tous ses angles sont dans la circonférence.

14. On dit qu'un cercle est décrit autour d'une figure rectiligne lorsque sa circonférence passe par le sommet de tous les angles de cette figure.

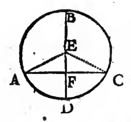
15. Une figure rectiligne dont tous les côtés touchent un cercle est dite décrite autour de ce cercle.

16. Un cercle qui touche tous les côtés d'une figure rectiligne est dit inscrit dans cette figure.

17. Une figure rectiligne est dite inscrite dans une autre figure rectiligne lorsque tous les angles de la premiere sont sur les côtés de la seconde.

THÉOREME PREMIER.

UN diamétre BD *qui coupe la ſoutendante* AC *à angles droits, la coupe auſſi en deux parties égales; & s'il la coupe en deux parties égales, il la coupe à angles droits.*



Du centre E menez AE, CE, puiſque les triangles rectangles AFE, CFE ont leur hypotenuſe AE, CE égales[a], & le côté EF commun; les autres côtés AF, FC ſeront égaux[b].

a Défin. 29. 1.

b 7. 1.

Les triangles AFE, CFE ſont équilatéraux par la ſuppoſition, donc ils ſont équiangles[c], donc les angles AFE, CFE ſont droits[d].

c Cor. 1. 19. 1.

d Défin. 6. 1.

C. Q. F. D.

THEOREME II.

Les lignes droites AB, DF *menées dans le cercle* ABFD *à égales distances du centre* O, *sont égales entre elles.*

Menez les perpendiculaires OC, OE & joignez OA, OD ; puisque OE = OC[a], OD =[b] OA, & que les angles E & C sont droits[a], DE sera = AC[c], & conséquemment DF = 2 DE[d] = 2 AC[f] = AB.

a Hipot.
b Défin.
e 15. 1.
c 7. 1.
d 1. 3.
f Axiom.
4. 1.

C. Q. F. D.

THEOREME III.

Dans tout cercle AEFB *la plus grande ligne inscrite est le diamétre* AB, *& parmi toutes les autres*, CD *qui est plus voisine du centre* O *est*

plus grande que toute autre EF *qui en est plus éloignée.*

1. Tirez OC, OD, il est évident que AB = OC + OD [a] < CD [b].

2. Soit OP la distance de CD du centre O & OQ, celle de EF prises toutes les deux sur le même rayon & tirez les deux lignes OE, OF ; puisque les triangles COD, EOF ont leurs côtés CO, OD, EO, FO [a] égaux l'un à l'autre, & que l'angle compris COD < que l'angle compris EOF [c], il s'ensuit que la base DC est plus grande que la base FE [d].

a *Défin.* 29. 1.
b 15. 1.
c *Axiom.* 2. 1.
d 18. 1.

C. Q. F. D.

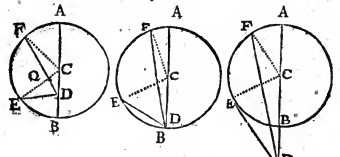
COROLLAIRE.

Il suit de-là qu'une ligne droite plus grande que le diamétre, tirée d'un point pris dans le cercle, coupera la circonférence, & qu'elle

la coupera en deux points si elle est prolongée de part & d'autre.

THEOREME IV.

Si d'un point D *pris dans un cercle & qui n'est point le centre on tire à la circonférence des droites* DA, DF, DE, *la plus grande* DA *sera celle qui passera par le centre ; & de toutes les autres la plus voisine de* DA *sera plus grande que toute autre* DE *qui en sera plus eloignée.*



Du centre C tirez CE, CF.

a 11. 4. 1. AD (= DC + CF) < DF a.

2. Puisque DC est commun aux deux triangles DCF, DCE, que

le côté CF = CE [b] & que l'angle compris DCF < DCE [c], il s'ensuit que DF < DE [d].

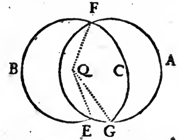
C. Q. F. D.

b *Défin.* 29.
c *Axiom.* 2. 1.
d 18. 1.

COROLLAIRE I.

Puisque par ce théoreme on ne peut pas mener du même côté d'un diamétre AB à la circonférence d'un cercle AEB deux lignes droites égales , il est évident qu'on n'y en peut mener trois égales que du centre; si donc on a un point dans un cercle d'où on puisse mener à sa circonférence trois lignes droites égales, ce point en sera le centre.

COROLLAIRE II.

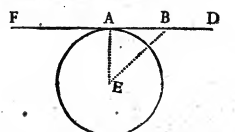


Il suit aussi de-là qu'un cercle B ne peut en couper un autre A

que dans deux points F, E; car ſi par impoſſible il pouvoit le couper en trois points F, E, G, ces trois points ſeroient communs aux aux deux cercles A & B, & ayant tiré du centre Q du cercle B les rayons QF, QE, QG, il s'enſuivroit qu'on pourroit mener à la circonférence du cercle A d'un point Q différent de ſon centre C, trois lignes droites égales; ce qui eſt impoſſible par le corollaire précédent.

THEOREME V.

Si on mene une tangente FAD *au point* A *d'un cercle* E, *elle ſera toute entiere hors de ce cercle.*



D'un point B pris ſur la tan-

gente menez BE au centre E, & joignez AE.

Puisque AE est perpendiculaire à AB [a] elle est moindre que EB [b], donc le point B est hors du cercle [c]; & comme on pourra démontrer la même chose de tout autre point pris sur cette tangente, il est évident qu'elle est toute hors du cercle, & qu'elle le touche seulement au point A.

a Défin. 9. 3.
b 16. 1.
c Défin. 19. & Axiom. 2. 1.

C. Q. F. D.

THEOREME VI.

LES deux cercles A, B, *qui se touchent extérieurement sont entierement hors l'un de l'autre; & les deux rayons* AC, BC *tirés de leurs centres au point de contact* C, *ne font qu'une seule & même ligne droite prolongée* ACB.

Soit la droite DCE tangente commune aux deux cercles au point de contact C[a], le cercle B étant entierement au-dessus de cette tangente & le cercle A au-dessous[b], il est évident qu'ils sont hors l'un de l'autre. De plus les angles ACD, BCD étant droits[c], ACB ne sera qu'une seule ligne droite prolongée[d].

a Défin. 10. 3.
b 5. 3.
c Défin 9. 3.
d Cor. 2. 4. 1.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Il suit de-là qu'une ligne droite qui joint les centres des deux cercles A, B qui se touchent extérieurement passe par le point de contact.

THEOREME VII.

SI deux cercles inégaux AE, AF *se touchent intérieurement, le plus petit sera tout entier dans le plus*

grand, & une droite AC *tirée du centre* C *du plus grand au point de contact* A *passera par le centre du plus petit.*

Soit PAB la tangente commune menez du centre D du plus petit à sa circonférence la droite DE; & joignez C, E & D, A.

Les angles PAD, PAC étant droits[a] AD & AC se confondront[b]; ainsi le point D tombe sur la ligne AC. De plus CA est plus grand que CE[c], donc le point E tombe dans le cercle AF; on prouvera de même que tout autre point pris sur la circonférence du petit cercle tombera dans le grand.

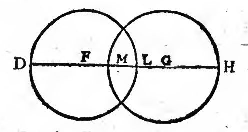
C. Q. F. D.

a Défin. 9. 3.
b Axiom. 7. 1.
c 4. 3.

THEOREME VIII.

SI la distance des centres FG *de deux cercles* DL, MH, *est moindre que la somme, & plus grande que la*

différence de leurs demi-diamétres FL, GM, *ces deux cercles se couperont.*



Car soit FG prolongée de deux côtés jusqu'à ce qu'elle rencontre les circonférences des deux cercles en D, L, M, H.

a *Hipot.*

Puisque FG > FL + GM[a], si on ôte GM de part & d'autre, on aura FG − GM (= FM) > FL[b]; d'où il conste que le point M tombe dans le cercle DL[c].

b *Axiom.* 6. 1.

c *Axiom.* 2. 1.

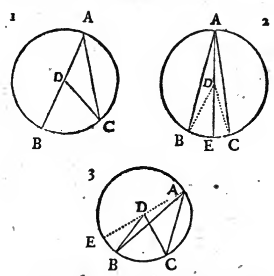
De plus puisque FG < FL − GM[a], en ajoûtant de part & d'autre GM, on aura FG + GM (FG + GH) = FH < FL[b], donc le point H tombe hors du cercle DL; mais on a vû que le point M tomboit dedans, donc ces deux cercles se coupent[d].

d *Défin.* 11. 3.

C. Q. F. D.

THEOREME IX.

*L'*ANGLE BDC *au centre est double de l'angle* BAC *à la circonférence, lorsque ces deux angles appuyent sur le même arc* BC.



Soit tiré le diamétre ADE. Il peut arriver trois cas ; ou ce diamétre tombera sur un des côtés de l'angle BDC, ou il tombera dans cet angle, ou enfin il tombera en dehors.

Dans le premier cas BDC = A + C[a] = 2 BAC[b].

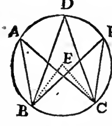
a 10. 1. b 6. 1.

Dans le ſecond & le troiſieme cas BDE = 2 BAE[a] & CDE = 2 CAE[a], donc BDE + CDE = BDC = 2 BAE + 2CAE =[c] 2 BAC.

c Axiom. 6. 1.

C. Q. F. D.

CORLLAIRE.



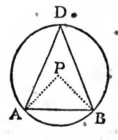
Il ſuit de-là que tous les angles A, D, F qui ont leur ſommet à la circonférence, & qui appüient ſur le même arc BC, ſont égaux étant chacun la moitié de l'angle BEC.

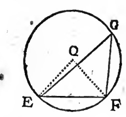
C. Q. F. D.

THEOREME X.

Les angles D, G *à la circonférence, qui appuient ſur des ſoutendantes égales priſes dans les cercles* ADB, EGF *dont les diamétres ſont égaux;*

égaux, sont aussi égaux ; & les soutendantes des angles égaux prises dans ces mémes cercles sont égales.





Des centres P & Q tirez AP, BP, EQ, FQ.

1. Puisque AB = EF [a] AP = BP = EQ = FQ [b], P sera = Q [c] & conséquemment D (= $\frac{1}{2}$ P = $\frac{1}{2}$ Q)[d] = G.

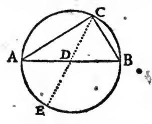
2. D = G [a], donc P = Q [d] donc PA étant = QE & PB = QF [b], AB sera = EF [e].

C. Q. F. D.

a *Hipot.*
b *Défin.*
19. 1. & *Hipot.*
c 19. 1.
d 9. 3.
e *Axiom.* 9. 1.

THEOREME XI.

L'ANGLE ACB dans le demi cercle est droit.

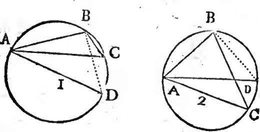


Soit tiré le diamétre CE puisque
[a 9. 3.] ACD $= \frac{1}{2}$ ADE [a] & BCD $= \frac{1}{2}$
BDE [a]; donc ACD + BCD =
[b Axiom. 4. 1.] (ACB) $= \frac{1}{2}$ ADE + $\frac{1}{2}$ BDE [b] =
à la moitié de deux angles droits [c]
[c 4. 1.] = à un angle droit.

C. Q. F. D.

THEOREME XII.

L'ANGLE vertical ABC *d'un triangle obliquangle* ACB *inscrit dans le cercle, est égal à un angle droit plus ou moins, l'angle* CAD *compris par la base* AC, *& le diamétre* AD *mené d'une des extrémités de cette base.*



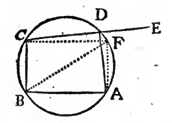
Car ayant tiré BD, l'angle ABD fera droit [a], & CAD fera = CBD [b]; donc dans le premier cas l'angle ABC = à l'angle droit ABD + CAD, & dans le fecond il eft égal au même angle droit − CAD [c].

a rt. 3.
b Cor. 3.

C. Q. F. D.

THEOREME XIII.

Les angles oppofés ABC, ADC *d'un quadrilatere* ABCD *infcrit dans le cercle font pris enfemble égaux à deux droits.*



Menez le diamétre BF, & joignez AF & CF.

a 11. 3.
b 2. Cor. 21. 1.
f Cor. 9. 3.
d Axiom. 4. 1.

Puisque BCF & BAF sont deux angles droits [a], ABC + AFC sont égaux à deux droits [b], mais AFC = ADC [f]; donc ABC + ADC sont égaux à deux droits [d].

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

a 13. 3.
b 4. 1.
c Axiom. 5. 1.

Il suit de-là que, si on prolonge un côté CD d'un quadrilatere ABCD inscrit dans le cercle, l'angle extérieur EDA = à l'intérieur opposé ABC; car ABC + ADC = [a] deux droits = EDA + ADC [b]; donc ABC = EDA [c].

COROLLAIRE II.

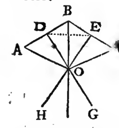
Il paroît aussi par ce théoreme

qu'un parallélograme obliquangle ne peut pas être inscrit dans le cercle, parce que ses angles opposés étant égaux entr'eux [a], leur somme est moindre ou plus grande que deux droits.

a 23. 1.

THEOREME XIV.

On peut faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés A, B, C, *pourvu qu'ils ne soient pas placés dans une même ligne droite.*



Menez les lignes AB, BC & divisez-les en deux parties égales par les perpendiculaires DG, EH, qui prolongées se couperont en quelque point O, qui sera le centre du cercle qui passera par les trois points A, B, C.

Je dis d'abord que ces perpen-

diculaires se couperont; car ayant mené DE il est évident que les lignes OD, OE étant perpendiculaires à AB, BC les angles EDO, DEO seront moindres que deux droits donc elles se couperont [a]; maintenant si du point d'intersection O, on mene les droites OA, OB, OC, on aura le triangle BDO = au triangle ADO [b], donc AO = BO; de même le triangle CEO étant = BEO [b] CO = BO = AO; donc un cercle décrit du centre O avec le rayon AO, passera par B & par C [c].

C. Q. F. D.

a *Axiom.* 8. 1.

b *Axiom.* 9. 1.

c *Defin.* 19. 1.

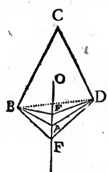
COROLLAIRE.

Il paroît de-là & du second corollaire du quatrieme théoreme de ce livre, qu'une perpendiculaire qui divise en deux parties égales une soutendante doit passer par le centre du cercle dans lequel elle est inscrite.



THEOREME XV.

SI les angles opposés BAD, BCD *d'un quadrilatere* ABCD *sont égaux à deux angles droits, on pourra l'inscrire dans un cercle.*



Car en faisant passer la circonférence d'un cercle par les trois points B, C, D; je dis qu'elle passera aussi par le quatrieme A: car supposant qu'elle n'y passe pas, mais qu'elle passe par quelque autre point F pris dans la ligne FO tirée par le centre O; & ayant tiré BF, DF; alors BFD+BCD=deux angles droits [a], & BAD + BCD = a deux angles droits aussi [b]: il s'en suit que BFD= BAD [c], ce qui est impossible [d];

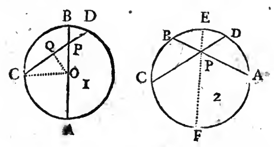
a Hippt. 3. & 13.
b Hipot.
c Axiom. 5. 1.

donc la circonférence du cercle paſſera par A.

C. Q. F. D.

THEOREME XVI.

Si deux lignes droites AB, CD *menées dans le cercle & terminées à la circonférence de part & d'autre ſe coupent en quelque point* P, *le rectangle compris ſous les parties* BP, PA *de l'une, eſt égal au rectangle compris ſous les parties* CP, PD *de l'autre.*



Si les deux lignes paſſent par le centre, la propoſition eſt évidente

par le premier théoreme du second livre.

Premier cas. Si une seule des lignes comme AB passe par le centre, alors menez du centre O sur l'autre ligne CD la perpendiculaire OQ & joignez CO.

Puisque $CQ = QD$ [a] on aura $CQ - QP = PD$ [b]; mais $\overline{OC + OP} \times \overline{OC - OP} = CP \times \overline{CQ - PQ}$ [c]; donc en mettant à la place de ces quantités leurs valeurs AP, PB, PD, on aura $AP \times BP = CP \times PD$.

Second cas. Si aucune des lignes ne passe par le centre, on verra par le premier cas en menant le diamétre FE par leur point d'intersection P que $AP \times PB = CP \times PD$ [d].

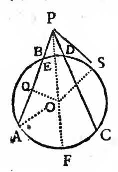
C. Q. F. D.

a 1. 3.
b *Axiom.* 5. 1.
c 8. 2.
d *Axiom.* 1. 1.

THEOREME XVII.

Si de deux points A & C, *pris dans la circonférence d'un cercle, on mene deux droites* AP, CP *qui se rencon-*

trent dans un point P *hors le cercle, le rectangle de la toute* AP *par sa partie hors du cercle* BP, *est égal au rectangle de la toute* CP *par sa partie hors du cercle* DP.



Par le centre O menez la ligne PE, qui rencontrera le cercle en E & en F; menez OQ perpendiculaire à AP & joignez A, O.

Le rectangle de $\overline{PO+OA} \times \overline{PO-OA}$ = au rectangle de PA × $\overline{PQ}^2 - \overline{QA}^2$ [a], c'est-à-dire, PF × PE = PA × PB. On prouvera de même que PF × PE = PC × PD; donc PA × PB = PC × PD [b].

a 8. 2.

b *Axiom.* 8. 1.

C. Q. F. D.

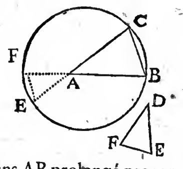
COROLLAIRE.

Si PS est tangente au point S, & qu'on mene le rayon OS, alors PS^2 étant $= \overline{PO+OS} \times \overline{PO-OS}$ [c] = PF × PE, on aura PC × PD = PS^2 [b].

c *Cor.* 7. 2.

THEOREME XVIII.

Dans les triangles équiangles ABC, DEF *les rectangles compris sous les côtés correspondans pris alternativement, sont égaux, c'est-à-dire,* AB X DF = AC X DE.



Dans AB prolongé prenez AF = DF, faites passer la circonférence d'un cercle par les trois points F, C, B [a], qui coupera AC prolongé en E & joignez EF.

Les triangles ACB, AFE sont équiangles, car E = [b] B, EAF = [c] BAC; donc F = [d] C; donc les triangles AEF, DEF sont équiangles & égaux, puisque on a pris AF = DF [e]; mais AC X AE = AB X AF [f];

a 14. 3.
b Cor. 9. 3.
c 5. 1.
d 1. Cor. 10. 1.
e 20. 1.
f 16. 3.

donc enfin $AB \times DF = AC \times DE$[g]. [g 1. 3.]

C. Q. F. D.

THEOREME XIX.

Le rectangle compris sous les deux côtés AC, BC *d'un triangle* ABC, *est égal à celui qui est compris sous la perpendiculaire* CD *& le diamétre* CE *du cercle circonscrit au triangle.*

Ayant joint EB il est évident que les triangles EBC, ACD sont équiangles, puisque les angles A & E[a] sont égaux, & que les angles D & B sont droits[b]; donc par le théoreme précédent $AC \times CB = EC \times CD$.

[a] Cor. 9. 3.

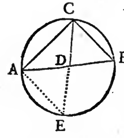
[b] Hipot.

C. Q. F. D.

THEOREME XX.

Si du sommet C *d'un triangle* ACB *on abaisse sur la base* AB *une droite qui divise en deux également l'angle* C, *le quarré de cette ligne* CD,

plus le rectangle compris sous les deux segmens AD, DB *de la base sera égal au rectangle des deux côtés qui comprennent l'angle divisé.*



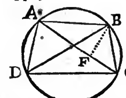
Faites passer une circonférence de cercle ACBE par le sommet des trois angles du triangle [a]; prolongés CD jusqu'à ce qu'elle coupe la circonférence en E, & joignez AE, il se forme deux triangles ACE, BCD dans lesquels l'angle E = B [b] & ACD = BCD [c]; donc ces triangles sont équiangles [d]; donc $AC \times CB = CD \times CE$ [e] $= CD \times \overline{CD+DE} = CD^2 + CD \times DE$ [f] $= CD^2 + AD \times DB$ [g]. *C. Q. F. D.*

a 14. 3.
b Cor. 9. 3.
c Hipot.
d 2. Cor. 10. 1.
e 18. 3.
f 4. 2.
g 16. 3.

THEOREME XXI.

Le rectangle de deux diagonales AC, DB *d'un quadrilatere* ABCD,

inscrit dans un cercle, est égal à la somme de deux rectangles AB × DC, AD × BC *compris sous les côtés opposés.*



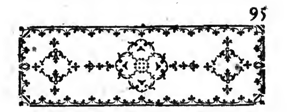
Menez BF sur AC de telle maniere que l'angle CBF soit = ABD.

a Cor. 9. 3.
b Const.
b 2. Cor. 10. 1.
d 18. 3.
e Axiom. 4. 1.

Puisque BCF = ADB[a] & CBF = ABD[b] les triangles CBF, DBA[c] sont équiangles; donc BC × AD = BD × CF[d]; de plus puisque ABF = CBD[e] & BAF = BDC[a], les triangles ABF, BDC seront pareillement équiangles[c]; donc AB × DC = BD × AF[d], & ajoutant de part & d'autre les rectangles égaux BC × AD & BD × CF, on aura AB × DC + BC × AD = BD × AF + BD × CF = BD × AC[f]. *C. Q. F. D.*

f 4. 2.

Fin du III. Livre.



ELEMENS DE GEOMETRIE,

LIVRE QUATRIEME.

DEFINITIONS.

1. RAISON ou rapport, eſt la proportion qu'ont l'une à l'autre deux grandeurs de même genre, telles que ſont deux nombres, deux lignes, deux ſurfaces, &c.

La meſure du rapport de deux grandeurs eſt le nombre qui exprime combien de fois l'une de ces grandeurs, appellée l'antécédent, contient, ou eſt contenue dans l'autre, qu'on appelle le conſéquent.

2. Trois grandeurs ſont en proportion lorſque la raiſon de la premiere à la ſeconde eſt la même que celle de la ſeconde à la troiſieme.

3. Quatre grandeurs ſont en proportion lorſque la raiſon de la premiere à la ſeconde eſt la même que celle de la troiſieme à la quatrieme.

Pour marquer que quatre grandeurs A, B, C, D, ſont en proportion, on les écrit ainſi, A. B : : C. D, ou bien ainſi A : B = C : D. Nous nous ſervirons toujours de cette derniere expreſſion qui nous paroît plus commode.

4. De trois grandeurs proportionnelles, la ſeconde s'appelle moyenne proportionnelle entre la premiere & la troiſieme, & cette troiſieme eſt dite troiſieme proportionnelle aux deux premieres.

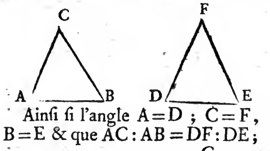
5. Si on a quatre grandeurs proportionnelles, la derniere eſt quatrieme proportionnelle aux trois autres.

6.

6. On dit que des grandeurs ſont continuement proportionelles, ou en proportion continue, lorſque la premiere eſt à la ſeconde, comme celle-ci à la troiſieme, comme la troiſieme à la quatrieme, ainſi de ſuite, &c.

7. Lorſqu'on a une ſuite ou ſérie de grandeurs continuement proportionelles; la raiſon de la premiere à la troiſieme eſt doublée de celle de la premiere à la ſeconde, & celle de la premiere à la quatrieme eſt triplée de la premiere à la ſeconde, ainſi de ſuite.

8. Les figures ſemblables ſont celles dont les angles ſont reſpectivement égaux les uns aux autres, & dont les côtés au tour de ces angles égaux ſont proportionels.



Ainſi ſi l'angle $A = D$; $C = F$, $B = E$ & que $AC : AB = DF : DE$;

G

BA : BC = ED : EF , &c. ces triangles seront semblables.

AXIOMES.

1. Les grandeurs qui ont une même raison à une seule & même grandeur, ou à des grandeurs égales, sont égales entr'elles.

2. Les grandeurs égales ont une même raison à une seule & même grandeur.

3. Les grandeurs auxquelles une seule & même grandeur a une même raison, sont égales.

4. Si on compare deux grandeurs à une troisieme, celle-là sera la plus grande qui y aura un plus grand rapport.

5. Les raisons égales à une même raison, ou à des raisons égales, sont égales entr'elles.

Ainsi si A : B = C : D & C : D := E : F, c'est-à-dire, si la raison de A à B = à celle de C à D, & que celle de C à D soit = à celle de E à F, alors la raison de A à B = à celle de E à F ou bien A : B = E : F. De plus si on a deux rangs de grandeurs proportionelles comme A :

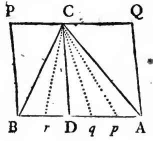
B=C : D & A : B=C : E, & que les trois premiers termes soient les mêmes dans les deux rangs, les deux autres D & E seront égaux ; parce que C a avec eux une même raison, sçavoir celle de A à B [d].

d *Axiom.* 3.

Lorsque dans quelques démonstrations vous trouverez plusieurs grandeurs écrites ainsi de suite A:B =C : D=E : F=G : H=I:K, &c. vous en conclurez que les deux premieres sont proportionnelles aux deux dernieres.

THEOREME PREMIER.

Les triangles ACD, BCD, *& les parallelogrammes* ADCQ, BDCP, *qui ont même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases* AD, BD.



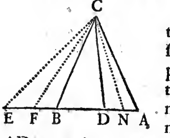
Que la base AD soit à la base BD comme le nombre M (3) est au nombre N (2) ou ce qui

eſt la même choſe que AD, contienne le nombre M (3) des parties dont BD en contient le nombre N (2) alors tous les triangles ACp, pCq, DCr, rCB, &c. (faits en tirant du point C des droites à tous les points de diviſion des deux baſes AD, BD) ſeront égaux [a], & le triangle ACD ſera au triangle BCD comme le nombre des petits triangles qu'il contient, à ceux que contient BCD, ou comme le nombre de parties dans AD, au nombre de parties dans BD (puiſqu'il y en a autant que de triangles) ou enfin comme AD eſt à BD; la raiſon des parallelogrammes ſera auſſi la même, puiſque étant doubles des triangles ils doivent être en même raiſon qu'eux.

a Cor. 2. 2. 2.

SCHOLIE.

Si les baſes AD, BD ſont incommenſurables, les triangles ſeront encore comme leurs baſes.



Car que le triangle BCD soit, s'il est possible; au triangle ACD non pas comme BD est à AD; mais comme quelqu'autre ligne DE (plus grande que BD). est à AD.

Soit AN moindre que BE & sous-multiple exact de AD, & soit DF plus grand que DB, & multiple de AN; enfin tirez CE & CF, il est évident que le point F tombera entre B & E, parce que par l'hypotese BF est moindre que AN, & AN moindre que BE. [a]

Maintenant DCF est à ADC, comme FD est à AD [b]; mais BCD est à ACD (ou ED à AD [c]) en plus grande raison que FD à AD [d], ou que FCD à ACD; donc BCD < FCD [d], ce qui est absurde, puisque DF a été prise plus grande que DB. On verra en faisant le même raisonnement que le triangle BCD ne peut

a Axiom. 1.

b 1. 4.

c Supp.

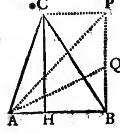
d Axiom. 4.

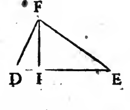
pas être au triangle ACD dans une raison moindre que celle de BD à AD ; donc BCD : ACD = BD : AD.

C. Q. F. D.

THEOREME II.

Les triangles ABC, DEF, *qui sont sur des bases égales* AB, DE, *sont entr'eux comme leurs hauteurs* CH, FI.





Soit BP perpendiculaire à AB & égal à CH, prennez BQ = FI & tirez AP, AQ.

Le triangle ABP = ACB [a] & ABQ = DEF [a] ; mais ABP : ABQ = BP : BQ [b], ou comme CH : FI ; donc ACB : DEF = CH : FI.

C. Q. F. D.

a Cor. 2. 2. 2.

b 1. 4.

THEOREME III.

Si quatre lignes A, B, C, D, *sont proportionelles, le rectangle* A X D *des deux extrêmes est égal au rectangle* B X C *des deux moyennes, & si le rectangle des deux extrêmes est égal au rectangle des deux moyennes, ces quatre lignes seront proportionelles.*

A———— B————

C———— D————

Premier cas. A X D : B X D = A : B[a] = C : D[b] = B X C : B X D[a]; donc A X D : B X D = B X C : B X D; donc enfin A X D = B X C[c].

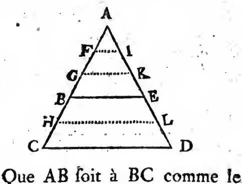
Second cas. A : B = A X D : B X D[a] = B X C : B X D[d] = C : D[a]; donc = A : B = C : D.

a 1. 4.
b *Hyp.*
c *Axiom.*
1. 4.
d *Axiom*
2. 4.

THEOREME IV.

Si dans un triangle ACD *on tire la droite* BE *parallele à un des côtés* CD,

elle coupera les deux autres proportionellement, c'est-à-dire, qu'on aura AB : BC = AE : ED.

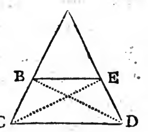


Que AB soit à BC comme le nombre M (3) & au nombre N (2); ou ce qui est la même chose que AB, contienne trois des parties dont BC en contient deux. Alors si des points de division indiqués par ces parties on mene les droites FI, GK, &c, paralleles au côté CD, ces droites diviseront AE & DE en un nombre de parties égales à celui que contiennent AB, BC[a]; ainsi AE sera à DE comme le nombre des parties dans AE sont au nombre de parties dans DE, ou, ce qui est égal, comme le nom-

[a] Cor. 1. 27. 1.

bre de parties dans AB au nombre de parties dans BC, ou enfin comme AB eſt à BC.

AUTREMENT.



Tirez CE & BD, alors les triangles BEC, EBD qui ſont ſur même baſe & entre mêmes paralleles, étant égaux [b] ABE: BEC = ABE: BED [c]; mais ABE: BEC = AB: BC [d] & ABE: BED = AE: ED [d], donc AB: BC = AE: ED.

b Cor. 12. 2.
c Axiom. 2. 4.
d 1. 4.

COROLLAIRE I.

De-là il ſuit que AC: AB = AD: AE; car AC: AB = AEC: AEB [a] = ABD: AEB [b] = AD: AE [a], donc AC: AB = AD: AE.

a 1. 4.
b Axiom. 2. 4.

COROLLAIRE II.

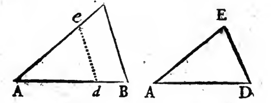
On aura auſſi AC: BC = AD: ED; car AC: BC = AEC: BEC = ABD: EBD = AD: ED, donc AC: BC = AD: ED.

COROLLAIRE III.

Il ſuit auſſi de-là qu'une ligne droite qui coupera les deux côtés d'un triangle proportionellement, ſera parallele au troiſieme côté.

THEOREME V.

Les côtés correſpondans * *dans les triangles équiangles* ABC, ADE, *ſont proportionels, c'eſt-à-dire, que* AB : AD = AC : AE.



Prenez ſur AB la partie A*d* = AD, & ſur AC la partie Ae = AE & menez *de*; les triangles A*de*, ADE ayant deux côtés & l'angle

* On appelle côtés correſpondans ceux qui ſont autour des angles égaux; on les appelle auſſi homologues.

compris égaux, auront l'angle A*de* =ADE[a]=ABC[b], ainsi *de* étant parallele à BC[d], on aura AB : A*d* (AD) = AC : A*e* (AE[c]).

a *Axiom.* 9. 1.
b *Hyp.*
d *Cor.* 9. 1.
c *Cor.* 1. 4. 4.

C. Q. F. D.

AUTREMENT.

Puisque AB X AE = AD X AC[e], donc AB : AD = AC : AE[f].

e 18. 3.
f 3. 4.

C. Q. F. D.

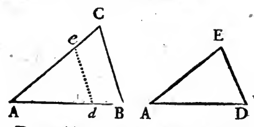
COROLLAIRE.

Il suit de-là que les triangles équiangles sont semblables[a].

a *Défin.* 1. 4.

THEOREME VI.

Si deux triangles ABC, ADE *ont un angle* BAC *égal à un angle* DAE, *& que les côtés autour de ces angles soient proportionels, c'est-à-dire, que* AB *soit à* AD *comme* AC *est à* AE, *ces triangles seront équiangles.*



Dans AB prenez $Ad = AD$, & menez de parallele à BC jusques à ce qu'elle rencontre AC en e.

Puisque $AB : Ad\ (AD) = AC : Ae$ [a] & que $AB : AD = AC : AE$ [b], on a $Ae = AE$ [c], donc l'angle $D = Ade$ [d] $= B$ [e] & l'angle $E = Aed$ [d] $= C$ [e].

C. Q. F. D.

a Cor. 1. 4. 4.
b Hyp.
c Axiom. 3. 4.
d Axiom. 9. 1.
e Cor. 1. 8. 1.

THEOREME VII.

Si quatre lignes A, B, C, D, *sont proportionelles, c'est-à-dire, si* $A : B = C : D$ *elles le seront encore* alternando $A : C = B : D$; *&* invertendo $B : A = D : C$.

A______ B______
C D______

1°. Puisque $A : B = C : D$, donc $A \times D = B \times C$ [a]; mais $A : C = A \times D$:

a 3. 4.

$C \times D$ [b] $= B \times C$ [c] $: C \times D$ [c] $= B : D$ [b], donc $A : C = B : D$.

b 1. 4.
c *Axiom.* 2. 4.

2°. Puisque $A \times D = B \times C$, donc *invertendo* $B : A = D : C$ [a].

a 3. 4.

C. Q. F. D.

THEOREME VIII.

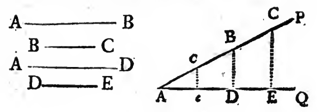
Si les quatre lignes AB, BC, AD, DE *sont proportionelles, on aura;*

Componendo $AB + BC : BC = AD + DE : DE$.

Dividendo... $AB - BC : BC = AD - DE : DE$.

Convertendo $\begin{cases} AB : AB + BC = AD : AD + DE. \\ \textit{ou } AB : AB - BC = AD : AD - DE. \end{cases}$

Mixtim... $AB + BC : AB - BC = AD + DE : AD - DE$.



Du point A menez les deux droites indéfinies AP, AQ, qui faſſent un angle quelconque PAe, ſur leſquelles prénez AB = AB ; BC = BC, AD = AD, DE = DE ; Bc = BC, De = DE, & menez BD, EC & ec.

a Hipot. b Cor. 2. 4. 4. c Cor. 2. 27. 1.

Puiſque AB : BC = AD : DE [a], EC eſt parallele à BD [b] : de même puiſque BC = Bc & De = DE, ec ſera auſſi parallele à DB [c] ; donc

AC (AB + BC) : BC = AE (AD + DE) : DE.

Ac (AB − BC) : Bc (BC) = Ae (AD − DE : De (DE)

$$\begin{cases} AB : AC\,(AB + BC) = AD : AE\,(AD + DE). \\ AB : Ac\,(AB - BC) = AD : Ae\,(AD - DE). \end{cases}$$

AC (AB + BC) : Ac (AB − BC) = AE (AD + DE) : Ae (AD − DE).

SCHOLIE.

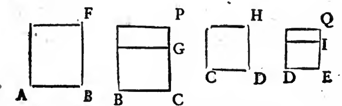
Ce que nous avons démontré ſur les raiſons des lignes, doit s'étendre auſſi aux raiſons des autres grandeurs de quelque eſpece quel-

les puissent être ; car si on prend des lignes droites qui soient en même raison que les grandeurs que l'on veut comparer, les mêmes conclusions leur seront applicables, puisque leurs raisons sont les mêmes.

THEOREME IX.

Les rectangles compris sous les termes correspondans de deux suites de lignes proportionelles, sont eux-mêmes proportionels.

Ainsi si AB : BC = CD : DE, & BF : CG = DH : EI, je dis que les rectangles AF, BG, CH & DI seront pareillement proportionels.



Faites sur les bases BC & DE deux autres rectangles BP & DQ,

dont les hauteurs ſoient reſpectivement égales à celles des rectangles AF & CH, on aura alors

a 1. 4. b *Hipot.* a *Conſt.* & 1. 4.

$AF:BP=(AB:BC^{a}=CD:DE^{b})=CH:DQ^{a}$,
& $BP:BG=(CP:CG^{a}=EQ:EI^{c})DQ:DI^{a}$;

donc *alternando* $AF:CH=BP:DQ$ & $BP:DQ=BG:DI$, d'où on aura $AF:CH=BG:DI$, & enfin $AF:BG=CH:DI$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Il ſuit de-là que les quarrés faits ſur quatre lignes proportionelles, ſont auſſi proportionels.

COROLLAIRE II.

De même ſi quatre quarrés ſont proportionnels, leurs côtés le feront auſſi; ſi $A^2:B^2=C^2:D^2$, on aura $A:B=C:D$; car ſoit $A:B=C:E$ par le précédent corollaire $A^2:B^2=C^2:E^2$, donc $E^2=D^{2}$ [d], donc $E=D$ [e] & $A:B=C:D$.

d *Axiom.* 3. & 5. 4. e *Cor.* 2. 5. 2.

THEO-

THEOREME X.

Si on divise en deux parties égales un angle C *d'un triangle* ACB *par une droite* CD, *qui tombe sur la base* AB, *elle divisera cette base en deux segmens* AD, DB, *qui seront en même raison que les côtés* AC, CB, *qui comprennent l'angle divisé.*

Dans AC prolongé prenez CE = CB & joignez E, B.

Puisque CE = CB l'angle E sera = EBC [a] = $\frac{1}{2}$ ACB [b] = ACD [c]; donc CD est parallele à EB [d]; donc enfin AD : DB = AC : CE (CB [e]).

a 6. 1.
b 10. 1.
c Hipot.
d Cor. 9. 1. 1.
e 4. 4.

C. Q. F. D.



H

THEOREME XI.

Dans tout triangle rectangle, la perpendiculaire CD, qui partant de l'angle droit C, tombe sur l'hypoténeuse AB, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens AD, DB ; & chacun des côtés autour de l'angle droit sera moyen proportionel entre le segment de l'hypoténeuse qui lui est adjacent & l'hypoténeuse.

C A D B

Dans les triangles BDC, BCA, l'angle BDC = BCA[a], l'angle B est commun ; donc ces deux triangles sont équiangles. On prouvera de même que ADC, BCA, sont équiangles ; donc ADC, BDC, le sont aussi ; donc[b] BD : CD = CD : AD ; AB : BC = BC : BD ; AB : AC = AC : AD.

C. Q. F. D.

a *Axiom.* 7.

b 5. 4.

COROLLAIRE.

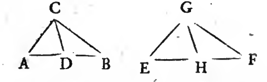
Puisque l'angle dans le demi cercle est droit [b], il suit que si d'un point C pris dans la circonférence on abaisse une perpendiculaire CD sur le diamétre AD, & que du même point C on mene aux extrémités du diamétre les deux cordes CA, CB, le quarré de la perpendiculaire sera égal au rectangle compris sous les segmens du diamétre, & le quarré de chaque corde sera égal au rectangle sous le diamétre & son segment adjacent à cette corde ; car on a par les proportions ci-dessus, & par le Théoreme troisieme, $CD^2 = BD \times AD$; $BC^2 = AB \times BD$; $AC^2 = AB \times AD$.

b II. 31.

THEOREME XII.

Si dans les triangles semblables ABC, EFG, *on mene d'un de leurs angles égaux* C, G, *les droites* CD, GH, *sur les côtés* AB, EF, *de telle*

façon qu'elles fassent des angles égaux avec leurs côtés homologues, ces droites seront en même raison que les côtés AB, EF, *sur lesquels elles tombent, & les diviseront proportionellement.*



Car puisque les triangles ADC, EHG, sont équiangles, que les triangles BDC, FHG le sont aussi, de même que les triangles ACB, EGF [a], on aura AB : EF = (AC : EG) = CD : GH ; & AD : EH = (DC : HG) = BD : FH [b].

a Hipot.

b 5. 4.

THEOREME XIII.

Si deux triangles ABC, ABD *ont un côté* AB *commun, & que du point* H *pris dans ce côté, on mene les deux lignes* HF, HG *respectivement paralleles aux côtés* BD, BC, &

terminées par les autres côtés AD, AC ; *ces deux lignes* HF, HG *feront en même raifon que les deux côtés auxquels elles font paralleles.*

Car AB : HA = BC : HF [c] ; AB : AH = BD : HG [c] ; donc BC : HF = BD : HG ; donc enfin *alternando* BC : DB = HF : HG.

[c] 5. & 7. 4.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Il fuit de-là que fi BC = BD, on aura HF = HG.

THEOREME XIV.

Le côté EF *d'un quarré* EFIH *infcrit dans un triangle* ABC, *eft à la bafe* AB *de ce triangle comme la perpendiculaire* CD *eft à la fomme* AB + CD *de la bafe & de la perpendiculaire.*

C
E P F
A H D I B

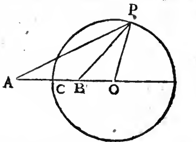
EF ou son égal PD : CP = AB : CD [a]; donc *convertendo* PD:PD + CP (CD) = AB:AB + CD [b] conséquemment *alternando* PD, ou son égale EF : AB = CD : AB + CD [c].

C. Q. F. D.

a 12. 4.
b 8. 4.
c 7. 4.

THEOREME XV.

Si on divise inégalement en C *la droite* AB, *& que dans son prolongement on prenne la partie* CO, *de façon qu'elle soit à* AC *comme* BC *est à* AC − CB; *que de plus du point* O *comme centre avec le rayon* OC *on décrive un cercle* CP; *alors si on tire les droites* AP, BP, *de façon qu'elles aillent se rencontrer dans la circonférence de ce cercle; quelque part qu'elles se rencontrent elles seront toujours dans la raison constante de* AC à BC.



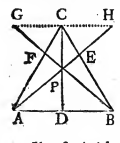
Menez le rayon PO puiſque par la ſuppoſition $CO : AC = BC : AC-CB$, on aura *convertendo* $CO : AO = BC : AC$ & *alternando* $CO : BC = AO : AC$; donc *convertendo* $CO : CO - BC = AO : AO - AC$[a], ou $CO : BO = AO : CO$. Et mettant PO à la place de ſon égal CO on a $PO : BO = AO : PO$, d'où l'on conclura que les triangles BOP, POA ſont équiangles, puiſque leurs côtés autour de l'angle commun O ſont proportionels, leurs autres côtés correſpondans ſeront donc auſſi proportionels, ainſi PO ou ſon égal $CO : AO = PB : AP$; mais on a déja eu $CO : AO = BC : AC$, donc on aura $PB : AP = BC : AC$.

C. Q. F. D.

a 8. 4.

THEOREME XVI.

Si par un point P *pris dans un triangle* ABC *on mene du sommet des trois angles de ce triangle sur les côtés opposés, les trois lignes droites* AE, CD, BF, *les segmens* AD, BD *d'un côté* AB *seront entr'eux comme les rectangles* AF X CE, BE X CF *compris sous les segmens des autres côtés pris alternativement.*



Soit la droite GCH, parallele à AB & soient AE, BF prolongées jusques à ce qu'elles la rencontrent en H & en G.

Il est évident que les triangles AFB, GFC; AEB, CEH; APB, GPH, sont équiangles deux à deux [a]; donc AF : CF = AB : CG [b]; comme aussi CE : BE = CH : AB [b], d'où on aura AF X CE : CF X BE =

a 5 & 8. 1.
b 5. 4.

(AB × CH : CG × AB[c]) CH : CG[d], mais CH : CG = AD : BD[e]; donc AF × CE : CF × BE = AD : BD. *C. Q. F. D.*

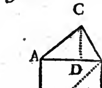
c 9. 4.
d 1. 4.
e 12. 4.

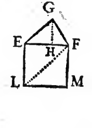
COROLLAIRE.

On tire de-là que si AD=BD, on aura AF × CE = CF × BE, d'où on a AF : CF = BE : CE.

THEOREME XVII.

Les triangles semblables ABC, EFG *sont entr'eux comme les quarrés* AK, EM *de leurs côtés homologues.*





Menez les perpendiculaires CD, GH, & les diagonales BI, FL.

Le triangle ABC : ABI = CD :

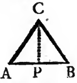
a 1. 4. b 12. 4. AI[a] $(AB) = GH : EF$[b] $(EL) = EGF : LEF$[a]; donc $ABC : ABI = EGF : LEF$, & *alternando* $ABC : EGF = ABI : LEF = AK : EM$[c].

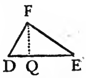
c Cor. 2. 2. 2.

C. Q. F. D.

THEOREME XVIII.

Si deux triangles ABC, DEF *ont un angle* A *de l'un égal à un angle* D *de l'autre, ces triangles seront entr'eux comme les rectangles* $AB \times AC$, $DE \times DF$ *compris sous les côtés qui renferment l'angle égal.*





Menez les perpendiculaires CP, FQ, par la suppofition & la conftruction les triangles ACP, DFQ, font femblables[a]; donc $AC : CP = DF : FQ$, mais $AC \times AB : CP \times AB = AC : CP$[b] $= DF : FQ$[c] $= DF \times DE : FQ \times DE$[b]; donc en pre-

a Cor. 2. 10. 1.
b 1. 4.
c 5. 4.

nant les deux premiers termes, & les deux derniers de ces proportions & *alternando*, on a $AC \times AB : DF \times DE = (CP \times AB : FQ \times DE) = ACB : DEF$[d].

C. Q. F. D.

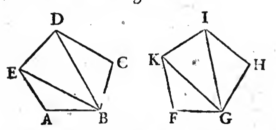
d Cor. 2. 1. 1.

COROLLAIRE.

On tire de-là que si $AC \times AB = DF \times DE$, ou que AB soit à DE comme DF à AC, alors les deux triangles seront égaux.

THEOREME XIX.

Les figures rectilignes semblables sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.



Soit les deux figures rectilignes semblables ABCDE, FGHIK, & menez BE, BD dans l'une & GK, GI dans l'autre, puisque A =

a *Hipot.* F[a] & que AE : AB = FK : FG[b], les triangles BAE, GFK sont semblables[c]; donc si de l'angle AED = FKI on tire les angles égaux AEB, FKG, les restans BED, GIK seront aussi égaux; donc puisque ED : KI = EA : KF[b] = EB : KG, les triangles EBD, KGI sont semblables[c]; & en faisant le même raisonnement on trouvera que DBC, IGH sont encore semblables.

b *Défin.* 8. 4.

c 6. 4.

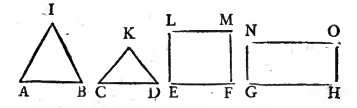
Maintenant puisque ABE : FGK = ($AE^2 : FK^2$ [d] = $ED^2 : KI^2$ [e]) = EBD : KGI; donc *alternando* ABE : EBD = FGK : KGI; *componendo*, ABDE : EBD = FGIK : KGI & *alternando* ABDE : FGIK = EBD : KGI. De plus puisque ABDE : FGIK = (EBD : KGI = $ED^2 : KI^2$ [d] = $DC^2 : IH^2$ [e] = DBC : IGH) [d], on a *alternando* ABDE : DBC = FGIK : IGH [d]; donc *componendo* & *alternando* on aura ABCDE : FGHIK = DBC : IGK = $DC^2 : IH^2$ [d] = $ED^2 : KI^2$ [e] = $AE^2 : FK^2$ = $AB^2 : FG^2$ = $BC^2 : GH^2$ [e]. *C. Q. F. D.*

d 17. 4.

e *Cor.* 1. 9. 4.

THEOREME XX.

Si quatre lignes droites AB, CD, EF, GH, *sont en proportion, les figures rectilignes semblables & semblablement posées que l'on décrit sur elles seront aussi proportionelles; ainsi* ABI *sera à* CDK *comme* EM *est à* GO.



$ABI : CDK = AB^2 : CD^2$ [a] $=$ $EF^2 : GH^2$ [b] $= EM : GO$ [a]; donc $ABI : CDK = EM : GO$.

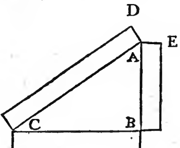
C. Q. F. D.

a 17. 1.
b Cor. 1. 9. 4.

THEOREME XXI.

Si on décrit sur les trois côtés d'un triangle rectangle ABC, *des figures semblables & semblablement posées* CD, BE, BF, *celle* CD *qui sera*

décrite sur l'hypoténeuse AC *sera égale aux deux autres* BE, BF *prises ensemble.*

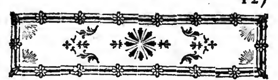


a 17. 1. $AB^2 : BC^2 = BE : BF$ [a]; donc *convertendo* $AB^2 : AB^2 + BC^2$ b 7. 2. $(AC^2$ [b]$) = BE : BE + BF$. Mais $AB^2 : AC^2 = BE : CD$ [a]; donc $CD = BE + BF$, puisque ces quantités sont les quatriemes termes des deux proportions dont les trois premiers sont les mêmes.

C. Q. F. D.

Fin du Livre IV.



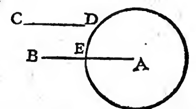


ELEMENS DE GEOMETRIE,

LIVRE CINQUIEME.

PROBLEME PREMIER.

D*eux droites inégales* AB, CD *étant données, retrancher de la plus grande* AB *une partie* AE *égale à la plus petite* CD.



Du centre A avec le rayon CD, décrivez un cercle [a] qui

[a] Post. 3.

coupera AB en E[b]; je dis que AE=CD puisque tous les rayons d'un même cercle sont égaux.

b Cor. 3. 3.

PROBLEME II.

D'un point donné A *tirer une droite* AB *égale à une droite donnée* CD.

C———D
A———————E
B

Menez la droite indéfinie AE[c] sur laquelle vous prendrez AB[d] =CD.

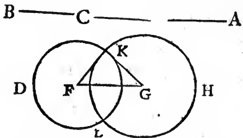
c Post. 1.
d 1. 5.

PROBLEME III.

Decrire un triangle avec les trois côtés FK, KG, GF, *égaux aux trois lignes* A, B, C, *dont deux prises ensemble sont plus grandes que la troisieme.*

Des

Des extrémités F & G du côté FG, & avec les rayons FK = A & GK = B, décrivez les deux cercles D, H qui se couperont en K; de ce point d'intersection menez FK, KG; FKG sera le triangle demandé.

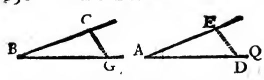


Par l'hypothese $B + C < A$, donc $B(=FG) < A - C$[a]; mais $B(=FG) > A+C$[b]; donc ces deux cercles se couperont mutuellement[c], & FKG sera le triangle requis puisque ses trois côtés sont égaux aux trois lignes données.

a *Axiom.* 6. 1.
b *Hyp.*
c 8. 3.

PROBLEME IV.

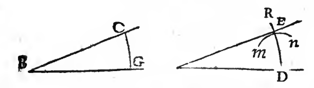
S UR une ligne donnée AQ *& à un point donné* A, *faire un angle* EAQ *égal à un angle donné* B.



Tirez une droite GC qui coupe les deux droites qui comprennent l'angle donné B, prenez AD=BG & sur AD par le précédent Probleme, faites un triangle dont les côtés DE, AE soient égaux aux côtés GC, CB du triangle GCB, alors l'angle A sera = à l'angle B [d] puisque ces triangles sont mutuellement équilatéraux.

d 19. 1.

AUTREMENT.



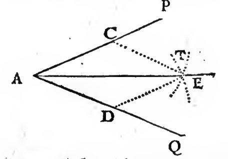
Des centres B, A & avec le rayon AD = BG, décrivez les arcs de cercle GC, DR, qui couperont BG, BC, AD en G, C & D; du point D comme centre & avec un rayon égal à la distance GC décrivez l'arc de cercle mEn qui

coupera l'arc DR en E, & enfin menez AE.

Les arcs égaux GC, DE des cercles dont les rayons BG, AD sont égaux, doivent comprendre des angles égaux, donc l'angle A=B.

PROBLEME V.

Diviser un angle rectiligne donné PAQ *en deux parties égales.*



Prenez AC = AD & des points D & C comme centres & avec un rayon plus grand que la moitié de la distance CD, décrivez deux arcs de cercle qui se couperont en quelque point E [a], joignez CE, DE & AE qui divisera

[a] 8. 3.

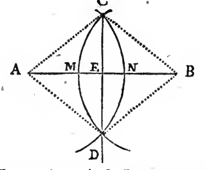
l'angle donné en deux parties égales ; puisque AC [b] = AD, CE [b] = DE, & que le côté AE est commun les deux triangles ACE, ADE, sont égaux donc DAE = CAE [c].

b *Conſt.*

c 19. 1.

PROBLEME VI.

DIVISER une droite donnée AB *en deux parties égales.*



Des points A & B comme centres & avec un rayon plus grand que la moitié de AB décrivez deux portions de cercle [d], qui se couperont en C & en D [e], joignez C, D qui divisera AB en E en deux parties égales ; car si on mene AC,

d *Poſt.* 3.

e 1. 3.

CB, AD, DB les triangles ACD, BCD feront équilatéraux, puisque les côtés font des rayons des cercles égaux [f] & que CD est commun donc ils feront équiangles [g], par conféquent l'angle ACE = BCE ; donc les triangles ACE, BCE ayant CE commun AC =[f] BC & l'angle compris égal, feront égaux, & AE fera = EB [h].

f *Conft.*
g 19. 1.
h *Axiom* 9. 1.

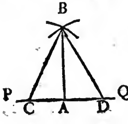
COROLLAIRE.

Il est évident de-là que CD qui divife AB en deux parties égales, lui est auffi perpendiculaire [a].

a *Défini.* 6. 1.

PROBLEME VII.

D'un point donné A *dans une droite donnée* PQ, *élever une perpendiculaire* AB.



Dans la ligne donnée prenez de part & d'autre du point A, AD = AC, & de C & D com-

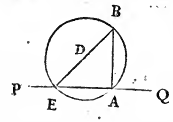
me centres avec un rayon plus grand que CA, décrivez deux arcs de cercle qui se couperont en B[b], abaissez BA qui sera perpendiculaire à PQ au point A.

b 8. 3.

Menez CB & DB; les triangles CAB, DAB seront équilatéraux[c], & conséquemment équiangles[d]; donc l'angle CAB=DAB; donc AB est perpendiculaire à PQ[e]. *C. Q. F. D.*

c Const.
d Cor. 1. 19. 1.
e Défin. 6. 1.

AUTREMENT.

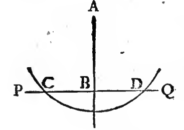


D'un point donné D pris hors la ligne donnée PQ, comme centre, décrivez par A un cercle qui coupe la ligne donnée en E, par D menez EB qui coupe le cercle en B, & tirez BA qui sera la perpendiculaire demandée; car l'angle EAB est dans le demi cercle, donc il est droit[a].

a 31. 3.

PROBLEME VIII.

D'un point donné A *mener une perpendiculaire sur une droite indéfinie* PQ.



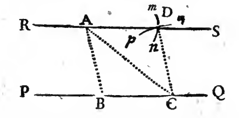
Du point A comme centre avec un rayon plus grand que la distance de A à la ligne donnée PQ, décrivez un arc de cercle[b] qui coupera PQ en deux points C & D[c], divisez CD en deux parties égales au point B, & menez AB qui sera la perpendiculaire demandée par la seconde partie de la premiere proposition du troisiéme livre.

b *Post.* 3.

c *Cor.* 3. 3.

PROBLEME IX.

Par un point donné A *tirer une ligne droite* RS *, parallele à une droite donnée* PQ.



Prenez un point quelconque B dans la ligne donnée, prenez BC = à la diſtance des points A & B, & des points A & C comme centres avec un rayon égal à BC, décrivez deux arcs de cercle [a] *pq, mn,* qui ſe couperont en quelque point D[b]; la droite RS tirée par les points A & D, ſera parallele à PQ.

a *Poſt.* 3.

b *S.* 3.

Car tirez AB, AC & DC, il eſt évident que les deux arcs de cercle ſe couperont mutuellement, puiſque la ſomme de leurs demi diamétres = AB + BC eſt plus grande que AC;

nous aurons de plus AB = BC [c] = CD = DA [c], donc ABCD sera un parallelogramme, & conséquemment RS sera parallele à PQ [d].

c *Const.*

d 24. 1.

AUTREMENT.

Du point A tirez la ligne AB quelconque, tirez RS de façon que l'angle SAB soit égal à l'angle PBA, & alors AS sera parallele à PQ [e].

e 9. 1.

PROBLEME X.

DÉCRIRE un quarré ABCD *sur une droite donnée* AB.

D C A B

Faites BC perpendiculaire & égale à AB [a]; des points C & A comme centres & avec un rayon = AB, décrivez deux arcs de cercle qui se couperont en quelque point D [b], tirez CD, AD, le quarré ABCD sera le quarré demandé.

a 7. 5. & 1. 5.

b *Post.* 3.

Par la construction les quatre côtés sont égaux & l'angle A est droit; donc cette figure est un parallelogramme rectangle, donc c'est un quarré [c].

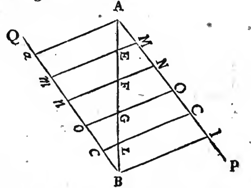
SCHOLIE.

On peut employer la même méthode pour décrire un rectangle dont les côtés sont donnés.

[c] Cor. 23. 1. & Défin. 24. 1.

PROBLEME XI.

Diviser une droite donnée AB en un nombre donné des parties égales.



Menez la droite AP [a] faisant un

[a] Post. 1. & 2.

angle quelconque avec AB, menez aussi BQ parallele à AP[b], dans chacune desquelles vous prendrez autant des parties égales AM, MN, NO, OC, &c. B*c*, *co*, *on*, *nm*, &c. que vous voulez en trouver dans la division de AB, (il n'importe de quelle longueur elles soient, pourvu qu'elles soient égales) tirez alors M*m*, N*n*, G*o*, qui diviseront AB dans les points requis.

Car *mn* & MN étant égales, &[c] paralleles FN, EM seront paralleles[d]; on prouvera de même que NF & GO sont paralleles, donc AM, MN, NO, &c. étant égales par la construction, il est évident que AE, EF, FG, &c. le seront aussi[e].

b 9. 5.

c Constr.

d 25. 1.

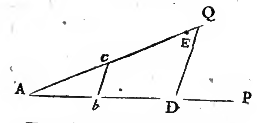
e 4. 4.

PROBLEME XII.

TROUVER une troisieme proportionelle à deux droites données AB, BC.

B———C

A———B



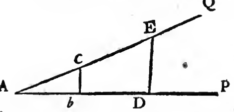
Tirez les deux droites indéfinies AQ, AP faisant un angle quelconque QAP, prenez $Ab = AB$ [a], $Ac = BC$ [a], & $bD = BC$ [a], joignez bc & menez DE parallele à bc [b] qui coupera AQ en E; cE sera la troisieme proportionelle demandée, car $Ab\,(AB) : Ac\,(BC) = bD\,(BC) : cE$ [c].

a 1. 5.
b 9. 5.
c 4. 4.

PROBLEME XIII.

TROUVER une quatrieme proportionelle aux trois lignes données AB, AC, BD.

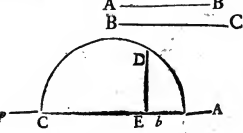
A——— B
A———— C
B————— D



Ayant tiré comme ci-dessus AP, AQ, prenez $Ab = AB$, $Ac = AC$ & $bD = BD$ [a], joignez bc & menez DE parallele à bc [b] qui coupera AQ en E & cE sera la quatrieme proportionelle cherchée ; car Ab (AB) : Ac (AC) = bD (BD) : cE[c].

PROBLEME XIV.

Trouver une moyenne proportionelle entre deux lignes données AB, BC.



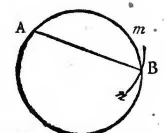
Prenez dans la droite indéfinie pA,

a 1. 5. $Ab = AB$ [a], & $bC = BC$ [a], divisez AC en deux parties égales au
b 6. 5. point E [b], & de ce point comme centre avec le rayon EC ou EA,
c Post. 5. décrivez le demi cercle ADC [c],
d 7. 5. élevez la perpendiculaire bD [d] qui sera la moyenne proportionelle cherchée ; car Ab (AB) :
e 11. 4. $bD = bD : bC$ (BC) [e].

PROBLEME XV

INSCRIRE dans un cercle donné une droite AB, *égale à une droite donnée* CE, *moindre que le diamétre du cercle.*

C ——— E

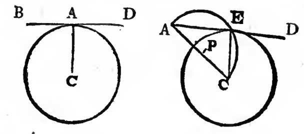


D'un point A pris dans la circonférence du cercle, avec un rayon égal à CE, décrivez l'arc

de cercle mBn [c], & joignez AB qui eſt égal à CE par la conſtruction.

PROBLEME XVI.

Mener une tangente à un cercle C, *par le point donné* A.



Ou le point donné ſera ſur la circonférence, ou il ſera hors du cercle.

Dans le premier cas tirez le rayon AC [a], & par le point A menez BD qui lui ſoit perpendiculaire [b], & qui touchera le cercle par la neuvieme définition du troiſieme Livre.

a *Poſt.* 1.

b 7. 5.

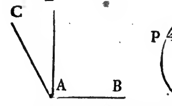
Dans le ſecond cas menez du

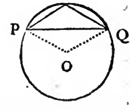
centre C au point A, la ligne [a] AC divisez-la en deux au point P [c], & de ce point comme centre avec le rayon AP décrivez le demi cercle [d] AEC qui coupera le cercle donné à un point [e] E, par ce point menez AED [a] qui touchera le cercle, parce que ayant mené CE l'angle AEC sera droit [f], donc AE sera perpendiculaire à CE ; donc elle sera tangente au cercle C.

c 6. 5.
d Post. 3.
e 8. 3.
f 11. 3.

PROBLEME XVII.

DÉCRIRE sur une droite donnée PQ *un segment de cercle* PEQ, *capable d'un angle égal à l'angle donné* BAC.





Faites AD perpendiculaire à AB [a], & faites l'angle PQO [b] ainsi que

a 7. 5.
b 4. 5.

que QPO = CAD différence de l'angle donné CAB avec l'angle droit DAB ; de l'interſection O des deux lignes PO, QO comme centre, & avec une de ces lignes pour rayon décrivez le cercle PEQ[c] ; je dis que le ſegment PEQ fait ſur PQ eſt le ſegment demandé, car l'angle E = à un angle droit + QPO[d] = BAD + DAC[e].

C. Q. F. D.

c *Poſt.* 3

d 12. 3

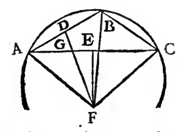
e *Conſ.*

SCHOLIE.

On peut conſtruire ce probleme de la même maniere lorſque l'angle donné eſt aigu, la ſeule différence conſiſte à tirer les deux lignes PQ, QO de l'autre côté de PQ, ce qui eſt évident par le douziéme Théoreme du troiſieme livre.

PROBLEME XVIII.

DECRIRE un cercle autour d'un triangle ACB.



Divisez en deux parties égales AD, DB; AE, EC; deux côtés quelconques AB, AC de ce triangle [a]; élevez les perpendiculaires DF, EF [b] qui se couperont en quelque point F, qui sera le centre du cercle demandé. Tirez les droites AF, CF, BE.

Ces deux perpendiculaires se couperont parce que l'angle D étant droit par la construction, l'angle AGD sera aigu [c], & conséquemment EGF [d] le sera aussi; donc GF, EF se rencontreront [e]. AE = EC [f], le côté EF est commun & l'angle AEF = CEF; donc AF = CF [g]; De plus AD = DB [f]; DF est commun & les angles ADF, BDF sont égaux [f]; donc BF = AF [g] = CF; donc F est le centre d'un cercle qui

a 6. 5.
b 7. 5.
c Cor. 5. 10. 1.
d 5. 1.
e Ax. 8. 1.
f Const.
g Ax. 9. 1.

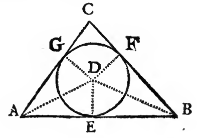
passera par les points A, B, C [h]. h Défi. 19.

S C H O L I E.

Il suit de-là que l'on peut faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés, pourvu qu'ils ne soient point situés dans une même ligne droite. On voit aussi par là comment on peut trouver le centre d'un cercle dont on n'a qu'un segment.

PROBLEME XIX.

INSCRIRE un cercle dans un triangle donné ABC.



Divisez en deux également les angles A & B par les droites AD, BD [a]; du point d'intersection D, a 5. 5.

abaissez DE perpendiculaire sur AB [b]; de D comme centre avec le rayon DE; décrivez le cercle GFE [c] qui touchera les trois côtés du triangle donné dans lequel conséquemment il sera inscrit.

b 8. 5.
c Post. 3.

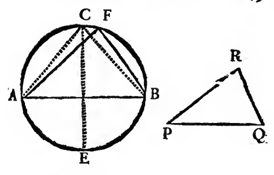
Menez DG, DF perpendiculaires à AC [b], CB; alors les triangles AGD, AED sont égaux puisqu'ils ont par la construction deux angles égaux, & un côté commun; donc DE=DG [a]. On prouvera de même que DF=DE; donc la circonférence du cercle passe par les points F & G [b] & elle touche les côtés du triangle dans ces points, puisque par la construction DG, DF leur sont perpendiculaires [c]; donc par la sixieme définition du troisieme Livre, le cercle GFE est inscrit dans le triangle ABC.

a 20. 1.
b Défi. 29. 1.
c Défi. 9. 3.

C. Q. F. D.

PROBLEME XX.

DECRIRE dans un cercle donné ABC, *un triangle équiangle à un triangle donné* PQR.



Tirez un diamétre CE & menez CA & CB faisant chacun avec CE un angle égal à la moitié de l'angle R [a] ; menez AB & AF faisant ensemble un angle égal à l'angle P [a] ; joignez FB, & AFB sera le triangle requis ; car AFB = C [b] = R [c], FAB = [c] P ; donc FBA sera égal à Q [d] ; donc AFB & PRQ sont équiangles.

a 5. & 4. du 5.
b Cor. 9. 3.
c Conf.
d Cor. 2. 10. 1.

PROBLEME XXI.

D ECRIRE autour d'un cercle donné O, *un triangle équiangle à un triangle donné* ABC.

G
D E
A B
H
Q R
O
S P T

Prolongez de part & d'autre le côté AB, faites l'angle POR=GBE & POQ = DAG[a] ; tirez par les points Q, R, P, des tangentes[b], qui en se coupant aux points H, T, S, formeront le triangle requis.

a 4. 5.
b 16. 5.

Car si on mene PQ on verra que les angles SQP + SPQ étant moindres que les angles SQO + SPO= à deux droits, les tangentes SH, ST ne seront pas paralleles & qu'elles se couperont en quelque point S[a]. Comme le même raisonnement s'applique aux autres tangentes il est évident qu'elles formeront par leur intersection le triangle SHT. Maintenant POR+T=

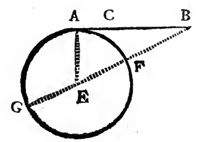
a Ax. 8. 1.

deux angles droits [b] = ABG + EBG [c], mais par la construction GBE = POR; donc ABG = T, on prouvera de même que S = BAG; donc ces deux triangles seront équiangles.

b Cor. 2. 11. 1.
c 4. 1.

PROBLEME XXII.

DIVISER une droite AB *en moyenne & extrême raison, c'est-à-dire, de façon que l'entiere* AB *soit à une de ces parties* BC *comme cette partie* BC *est à la restante* AC.



Faites AE perpendiculaire à AB & = $\frac{1}{2}$ AB [a].

Du centre E avec le rayon AE,

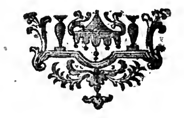
a 7. & 6. du 5.

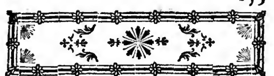
b Post. 3. décrivez un cercle [b]; menez par EB la ligne GB, & enfin faites $BC = BF$ [a].

c Cor. 17. 3. d 3. 4. e 8. 4. Puifque $AB^2 = BG \times BF$ [c] on a $BG : AB = AB : BF$ [d], d'où en divifant on tire $BG - AB : AB = AB - BF : BF$ [e] & comme par la conftruction $AB = GF$, & $BC = BF$ on a $BG - GF : AB = AB - BC : BF$, c'eft-à-dire, $BC : AB = AC : BC$, & *invertendo* $AB : BC = BC : AC$.

C. Q. F. D.

Fin du Livre V.

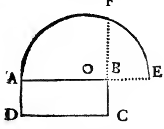




ELEMENS DE GEOMETRIE, LIVRE SIXIEME.

PROBLEME PREMIER.

Faire un quarré égal à un rectangle donné ABCD.



Prenez dans AB prolongé BE =[a] BC, divifez AE en deux également au point O[b], & de O com-

a 1. 5.
b 6. 5.

me centre & avec le rayon AO ou OE, décrivez le demi cercle AFE [c]; prolongez BC jusqu'à ce qu'il rencontre la circonférence en F; le quarré décrit sur BF sera égal au rectangle donné ABCD; car puisque par la construction BE = BC, AB X BC = AB X BE [d] = BF ² [e].

c *Post.* 3.

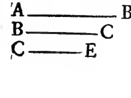
d *Cor.* 2. 2. 2.

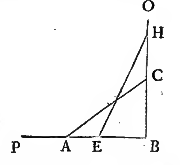
e 11. 4.

C. Q. F. D.

PROBLEME II.

FAIRE un quarré égal à un nombre quelconque de quarrés donnés.





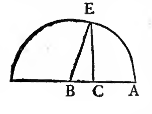
Soient AB, BC, CE, les côtés de trois quarrés donnés : menez à an-

gles droits les deux droites indéfinies BP, BO dans lesquelles vous prendrez BA = BA , BC = BC, joignez ensuite A, C & vous aurez $AC^2 =$ [a] $AB^2 + BC^2$; prenez ensuite sur BO, BH = AC, BE = CE & joignez EH vous aurez EH^2 (= [a] $BE^2 + BH^2 = BE^2 + AB^2 + BC^2$) $= AB^2 + BC^2$ [a] $+ CE^2$. [a 7. 2]

C. Q. F. D.

PROBLEME III.

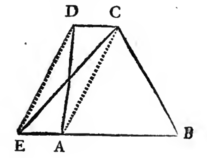
FAIRE un quarré égal à la différence de deux quarrés donnés.



Soient AB, BC les côtés des deux quarrés donnés; du point B comme centre avec le rayon BA décrivez un demi cercle, élevez au point C la perpendiculaire CE qui rencontre la circonférence en E; joignez BE; alors vous aurez $CE^2 =$ [a] $BE^2 (BA^2) - CE^2$. [a Cor. 7. 3]

PROBLEME IV.

FAIRE un triangle égal à un quadrilataire donné ABCD.



Menez AC d'un angle à l'autre, & DE parallele à AC qui ira rencontrer BA prolongée.

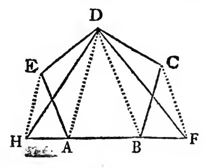
Menez aussi CE, & BCE sera le triangle requis.

Les triangles ACD, ACE sont égaux puisqu'ils sont sur même base & entre mêmes paralleles; donc si on les ajoute au triangle ABC, on aura BCE = (ABC + CAE=ABC + ACD) = ABCD[a].

a *Ax.* 4. 1.

PROBLEME V.

FAIRE un triangle égal à une figure de cinq côtés donnée ABCDE.



Tirez DA, DB, & menez EH & CF qui leur ſoient paralleles & qui aillent rencontrer AB prolongée de part & d'autre en H & en F, tirez DH & DF & le triangle HDF ſera le triangle requis.

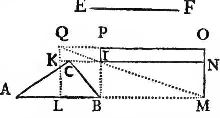
Car puiſque le triangle DEA = DHA & DCB = DFB [a], on aura ABCDE = (DEA + DCB + ABD = DHA + DFB + ABD) = DHF.

[a] Cor. 1. 2. 2.

C. Q. F. D.

PROBLEME VI.

Sur une droite donnée EF *faire un rectangle égal à un triangle donné* ABC.



Tirez par le sommet C du triangle ABC, KN parallele à AB [a]; divisez AB en deux également par la perpendiculaire LK [b] qui rencontre KN en K; tirez BP perpendiculaire à AB [b] qui coupera KN en quelque point I; prenez dans AB prolongé la partie BM = EF, par M & par I tirez MIQ coupant LK en Q, & menez QO, MO paralleles à AM & à LQ [a], elles se couperont en quelque point O, & INOP sera le rectangle demandé.

a 9. 5.

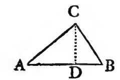
b 6. & 7. 7.

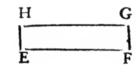
Il eſt clair que LI, IO, LO ſont des rectangles[c]; donc IN = BM = EF[d], & IO = LI[e] = ACB[f].

C. Q. F. D.

c Déf. 23. 1. & Cor. 23. 1. d Conſ. e 3. 2. f Cor. 2. 2.

Autre conſtruction & démonſtration 2. du même Probleme.





Du ſommet C du triangle donné abaiſſez ſur la baſe AB la perpendiculaire CD[a]; élevez ſur EF au point E la perpendiculaire EH[b] = à une quatrieme proportionelle aux trois lignes EF, AB & $\frac{1}{2}$ CD[c]; le rectangle EG compris ſous les deux lignes EF, EH ſera égal au triangle donnê ABC.

a 8. 5. b 7. 5. c 13. 5.

Car puiſque par la conſtruction EF : AB = $\frac{1}{2}$ CD : EH; donc EF × FH = $\frac{1}{2}$ CD × AB[d] = ABC[e].

C. Q. F. D.

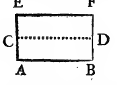
d 3. 7. e Cor. 2. 2. 2.

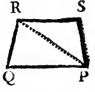
SCHOLIE.

Si dans le Probleme précédent on demandoit de plus que le parallélogramme requis eut un angle égal à un angle donné, la construction feroit la même, fauf qu'au lieu d'élever BP perpendiculairement fur BM il faudroit qu'elle fit avec BM l'angle PBM = à l'angle donné.

PROBLEME VII.

Sur une droite donnée AB *décrire un rectangle égal à une figure rectiligne donnée* PQRS.





Divifez en triangles PQR, PRS, la figure rectiligne donnée, & fur AB faites par le Probleme précédent un rectangle ABCD = au triangle

triangle PQR ; faites enſuite ſur CD un autre rectangle CDFE = au triangle PRS ; ABFE ſera le rectangle requis ; car ABFE = PQR + PRS = PQRS.

C. Q. F. D.

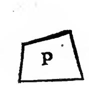
S C H O L I E.

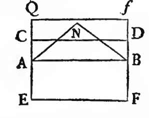
Si la figure donnée a cinq côtés la conſtruction ſera plus aiſée en cherchant un triangle qui lui ſoit égal comme on l'a fait dans le quatrieme & cinquieme Probleme ; & cherchant enſuite un rectangle égal au triangle ; mais ſi c'eſt un rectangle, le moyen le plus aiſé eſt de chercher une quatrieme proportionelle à la ligne donnée & aux deux côtés du rectangle, qui ſera la hauteur du rectangle cherché ; car puiſque par la conſtruction AB : PQ = PS : BF, on aura AB × BF = PQ × PS.



PROBLEME VIII.

TROUVER la somme, la différence ou le rapport de deux figures rectilignes données ABN & P.





Décrivez par le précédent Probleme deux rectangles AD & AF respectivement égaux à ABN & à P d'un même côté de AB, si on demande la différence & de différens côtés, si c'est la somme que l'on veut avoir ; alors Cf sera la valeur de la différence, & CF celle de la somme [a] ; on aura de plus pour le rapport cherché AE : AC = AF (P) : AD (ABN [b]).

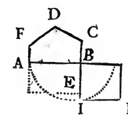
C. Q. F. D.

a *Ax.* 4. & 6. 1.

b 1. 4.

PROBLEME IX.

FAIRE un quarré égal à une figure rectiligne donnée ABCDF.



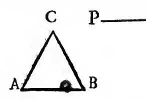
Faites sur AB un rectangle AE=ABCDF, & faites ensuite un quarré BH égal à ce rectangle en prenant pour son côté, BI moyenne proportionelle entre AB & BE ; ainsi qu'on l'a fait dans la construction du premier Probleme de ce livre.

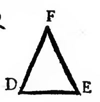
SCHOLIE.

C'est à peu près de la même maniere & en se servant de la construction du huitieme Probleme, qu'on peut décrire un quarré égal à la somme, ou à la différence de deux rectilignes donnés.

PROBLEME X.

TROUVER deux lignes qui ſoient en même raiſon que deux figures ſemblables données ABC, DEF.





Cherchez une troiſieme proportionelle PQ à deux côtés homologues AB, DE de ces figures [a], & vous aurez AB : PQ = ABC : DEF.

a 12. 5.

Car par la conſtruction AB : DE = DE : PQ; donc on a AB X PQ = DE² [b], mais AB : PQ = (AB² : AB X PQ [c] & AB² : AB X PQ = AB² : DE² [d] =) ABC : DEF [e].

b 3. 4.
c 1. 4.
d Ax. 2. 4.
e 19. 4.

COROLLAIRE.

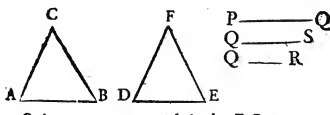
On voit par-là que les figures rectilignes ſemblables ſont en raiſon doublée de leurs côtés homo-

logues, car $AB : DE = DE : PQ$ [a]; donc $AB : PQ$ ou [b] $ABC : DEF$ en raison doublée de AB a DE. [c]

a *Conſt.*
b *Démonſt. précéd.*
c *Défin.* 7. 4.

PROBLEME XI.

Le rapport de deux figures ſemblables ABC, DEF *étant donné, trouver celui de leurs côtés homologues* AB, DE.



Soit ce rapport celui de PQ à QR.

Cherchez une moyenne proportionelle QS entre PQ & QR [a], & alors on aura $AB:DE = PQ : QS$.

Car $AB^2 : DE^2 = ABC : DEF$ [b] $= PQ : QR$ [c] $= PQ^2 : PQ \times QR$ [d]; mais $PQ \times QR = QS^2$ [e], donc $AB^2 : DE^2 = PQ^2 : QS$ [f], donc enfin $AB : DE = PQ : QS$ [g].

C. Q. F. D.

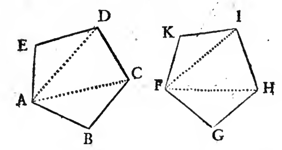
a 14. 5.
b 19. 4.
c *Hypo.*
d 1. 4.
e *Conſt.*
f *Ax.* 2. 4.
g *Cor.* 2. 8. 4.

COROLLAIRE.

De-là si un des côtés d'une des deux figures est donné, l'homologue de l'autre figure sera connu.

PROBLEME XII.

Décrire une figure FGHIK *égale & semblable à une figure rectiligne donnée* ABCDE.



Tirez AC & AD & faites FG = AB [a], faites l'angle GFH=BAC, HFI=CAD & IFK = DAE [b] : tirez FH = AC, FI = AD, KF = AE [a], joignez ensuite GH, HI, IK & KF.

Puisque les triangles FGH = ABC, FHI=ACD & FKI=AED [c],

a 2. 5.
b 4. 5.
c Ax. 9, 1.

le polygone FGHIK sera égal au polygone ABCDE[d].

De plus puisque par la construction l'angle BAC = GFH, & les côtés BA, AC égaux aux côtés GF, FH, les triangles ABC, FGH seront équiangles; donc l'angle BCA = GHF; ayant appliqué le même raisonnement aux triangles CAD, HFI, on verra que l'angle ACD = FHI; donc l'angle total BCD = à l'angle total GHI.

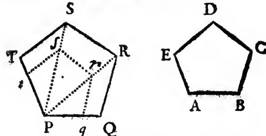
Il en sera de même des autres angles totaux, donc les deux polygones ABCDE, FGHIK seront égaux & semblables.

C. Q. F. D.

[d] *Ax.* 4. n.

PROBLEME XIII.

DÉCRIRE sur une droite donnée AB *une figure* ABCDE *semblable à une figure rectiligne donnée* PQRST.



Tirez PR & PS, sur PQ prolongé s'il le faut, prenez P q=AB [a] du point q menez qr parallele à QR, du point r, rS parallele à RS, & du point s, st parallele à ST [b], faites ensuite sur AB par le Probleme précédent un polygone ABCDE égal & semblable au polygone demandé P$qrst$; je dis que ABCDE est le polygone demandé : car par la construction les triangles Pqr, Prs, Pst sont semblables aux triangles PQR, PRS, PST [c]; donc le polygone P$qrst$ est semblable au polygone PQRST, qui est par conséquent semblable au polygone ABCDE [d].

a 1. 3.
b 2. 5.
c 4. & 5. du 4.
d Ax. 5. 4.

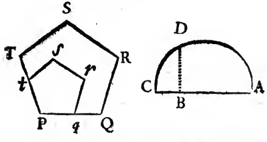
COROLLAIRE.

Il suit de-là que de deux figures

rectilignes semblables & semblablement situées, celle qui a la plus grande base est la plus grande & *vice versa.*

PROBLEME XIV.

Faire une figure P*qrst semblable à une figure rectiligne donnée* PQRST, *& qui soit à la donnée dans le rapport donné de* BC à AB.



Le rapport des deux figures & la base PQ d'une d'elles étant donnés, la base Pq de l'autre sera donnée en suivant la construction du Probleme onzieme de ce Livre; car si on prend DB moyenne proportionelle entre AB, BC, & que

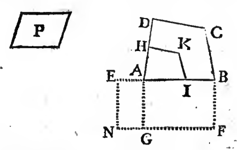
l'on prene ensuite Pq, quatrieme proportionelle à AB, BD, PQ, la figure semblable $Pqrst$ décrite sur cette quatrieme proportionelle sera la demandée; car on aura par la construction $AB^2 : BD^2 = PQ^2 : Pq^2$ [a] $= PQRST : Pqrst$ [b], & comme $BD^2 = AB \times BC$ [c], on a $AB^2 : AB \times BC$ ou $AB : BC$ [d] $= PQRST : Pqrst$.

a Cor. 1. 9. 4.
b Cor. 10. 6.
c 3. 4.
d 1. 4.

C. Q. F. D.

PROBLEME XV.

Décrire une figure AIKH *égale à une figure rectiligne donnée* P *& semblable à une autre* ABCD.



Sur AB faites le rectangle ABFG

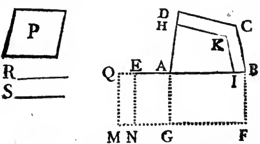
égal à ABCD [a] & sur AG le rectangle AGNE = [a] P, sur AB prenez AI moyenne proportionelle entre AB & AE [b], & sur AI décrivez AIKH semblable à ABCD [c]: ABCD : P = AF : AN [d] = AB : AE [e] = AB² : AB X AE [e]; mais par la construction AB X AE = A²; donc ABCD : P = AB² : AI² = ABCD : AIKH [f]; donc P = AIKH [d].

a 7. 6.
b 14. 5.
c 13. 6.
d Ax. 1. 4.
e 1. 4.
f 19. 4.

C. Q. F. D.

PROBLEME XVI.

Décrire une figure AHKI *semblable à une figure rectiligne donnée* ABCD, *& qui soit à une autre figure donnée* P *dans le rapport donné de* S *à* R.



Faites le rectangle ABFG =

a 7. 6. ABCD & AGNE = [a] P, prenez dans AE prolongé AQ quatrieme proportionelle à R, S & AE [b]; faites ensuite par le Probleme précédent AIKH = AG X AQ & semblable à ABCD.
b 13. 5.

Par la construction R : S = AE : AQ = AN : AM [c] = P : AG X AQ = AIKH.
c 1. 4.

C. Q. F. D.

Fin des Elemens de Géométrie.





ESSAI
SUR LES MAXIMIS
ET MINIMIS

Des Lignes, des Angles, & des Surfaces.

THEOREME PREMIER.

D*E tous les rectangles* AC × BC, AD × BD *que l'on peut former des deux parties d'une ligne donnée* AB *divisée en un point* C *ou* D, *&c. celui dont les côtés* AC, BC *sont égaux, sera le plus grand.*

C D
A ——————— | —— | ——— B

Car puisque $AD \times BD = (AC + CD) \times (AC - CD) = AC^2 -$

a 6. 2. b 1. 2.

CD^2 [a], il s'ensuit que AC^2 (AC X CB [b]) = AD X BD + CD^2 ou que AC X CB surpasse AD X BD de la quantité CD^2 ; donc il est plus grand que tout autre rectangle formé par la division de AB autre part qu'en C.

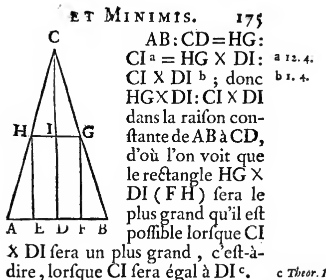
C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Il suit de-là que le quarré est le plus grand de tous les rectangles qu'on peut former sous le même périmétre.

THEOREME II.

Le plus grand rectangle EFGH *qu'on peut inscrire dans un triangle donné* ABC *est celui dont la hauteur* DI *est égale à la moitié* CD *de la hauteur du triangle donné.*



AB : CD = HG : CI [a] = HG X DI : CI X DI [b] ; donc HG X DI : CI X DI dans la raiſon conſtante de AB à CD, d'où l'on voit que le rectangle HG X DI (F H) ſera le plus grand qu'il eſt poſſible lorſque CI X DI ſera un plus grand, c'eſt-à-dire, lorſque CI ſera égal à DI [c].

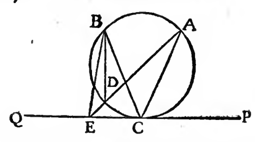
a 12. 4.

b 1. 4.

c *Theor. I. de cet Eſſai.*

THEOREME III.

S I de deux points A *&* B *pris dans la circonférence d'un cercle* ABC *on mene pluſieurs lignes droites* AC, BC, AE, BE, *de façon qu'elles aillent ſe rencontrer deux à deux ſur une tangente* PQ, *celles qui ſe rencontreront au point* C *où la tangente touche le cercle, comprendront le plus grand angle.*



Car puisque AE tombe hors du cercle [a], il coupera sa circonférence en quelque point D ; joignez BD, l'angle BED sera plus petit que l'angle BDA [b] = ACB [c].

C. Q. F. D.

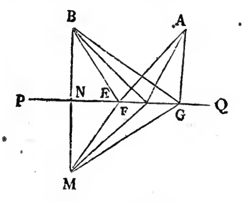
a 5. 3.
b 10. 1.
c Cor. 9. 3.

THEOREME IV.

Si on mene des deux points A, B, *d'un même côté de la ligne* PQ *un nombre quelconque de lignes droites qui aillent se rencontrer deux à deux sur cette ligne, la somme des deux* BE, AE *qui font avec* PQ *des angles* BEP, AEQ *égaux, sera plus petite que la somme de deux autres quelconques* BF, AF, *& de toutes les autres, celles qui se rencontrent*

le

le plus près du point E, *comme* BF, AF, *feront une somme moindre que d'autres* BG, AG *qui se rencontrent en un point* G *plus éloigné.*



Soit BNM perpendiculaire à PNQ & AE prolongé, jusques à ce qu'il rencontre cette perpendiculaire en M, menez MF, MG.

Les triangles MNE, BNE sont égaux, puisqu'ils sont rectangles par la construction; que de plus les angles BEN, MEN tous deux égaux à AEQ [a] le sont par conséquent entr'eux [b], & que NE est commun, donc MN = BN & ME = BE; MF = BF [c] & BG = MG [c];

a *Conſt. &* 5. 1.
b *Axiom.* 1. 1.
c *Axiom.* 9. 1.

mais AM = (AE + EB) est moindre que AF + FM[d] = AF + FB & AF + FM moindre que AG + GM =[e] AG + GB ; donc, &c.

d 15. 1.

e 17. 1.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Il paroît de-là, que le point de concours E de deux moindres, eu égard au point de concours F ou G de deux autres quelconques, sera toujours du côté de l'angle le plus petit ; car BFP est plus petit que BEP ou que son égal AEQ, & conséquemment plus petit que AFQ [a].

a 17. 1.

THEOREME V.

De toutes les lignes AP, BP; AQ, BQ *que l'on peut mener des points* A, B *à un point pris sur la partie convexe de la circonférence d'un cercle donné* PQ, *les deux qui feront avec le rayon* RP *mené au point* P *où elles rencontrent le cercle des angles égaux* BPR, APR *feront la moindre somme.*

B A L S P Q R

Tirez le rayon RQ & par les points Q & P menez la droite QPL, & soit S le point sur cette ligne où doivent se rencontrer BS, AS pour faire une moindre somme que toutes autres que l'on pourroit y mener des points A & B, de façon que BSP soit = ASL [a].

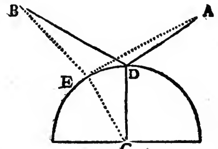
L'angle LPR < RQP [b] ou que RPQ [c], donc puisque APR=BPR [d], LPA sera plus petit que BPQ [e], conséquemment le point S tombera de l'autre côté de P, eu égard à la situation de Q par le Corollaire précédent, puisque S [d] est sur la ligne QL le point de concours des moindres BS, AS qui doit être du côté du moindre angle APL;

a Theor. 4.
b 10. 1.
c 6. 1.
d Hipot.
e Axiom. 6. 1.

donc enfin SP est moindre que SQ, & conséquemment AP + BP moindre que AQ + BQ, puisque leur point de concours P est moins éloigné de S que Q, qui est celui de AQ, BQ [a]. *C. Q. F. D.*

THEOREME VI.

Si de trois points donnés A, B, C, *on veut mener à un autre point* D *trois lignes dont la somme soit la moindre possible, il faut que la position de ce point* D *soit telle que les trois angles que les trois lignes données forment autour de ce point soient égaux.*



Car si on dit que la somme de

trois lignes AD, BD, CD eſt la moindre poſſible, & cependant que les trois angles ADC, CDB, BDA ne ſont pas égaux ; dans cette ſuppoſition de l'inégalité des angles ADC BDC ; du point C avec le rayon CD décrivez une portion de cercle ; & ſoit le point E pris ſur la circonférence où ayant mené AE, BE, CE, l'angle AEC ſoit = BEC ; alors par le Théoreme précédent AE + BE eſt moindre que AD + BD ; donc AE + BE + CE eſt moindre que AD + BD + CD, ce qui eſt contre la ſuppoſition ; * donc tous les angles autour du point D ſont égaux.

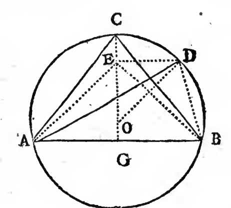
C. Q. F. D.

THEOREME VII.

De tous les triangles ABC, ABD *qu'on peut inſcrire dans le même ſegment de cercle* ABCD, *celui* ABC

* On prouvera de même l'égalité des angles ADC, BDA en prenant le point A pour le centre du cercle dont le rayon ſera AD.

dont les côtés AC, BC *sont égaux, est le plus grand.*



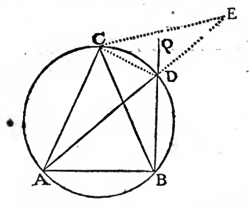
Soit CEG perpendiculaire & DE parallele à AB, du centre O menez le rayon OD & joignez AE & BE.

Il est évident que AC, CB étant égaux & CG étant commun & perpendiculaire à AB on aura AG, = GB [a], & que de plus CG passera par le centre O du cercle [b]; donc OE étant plus petit que OD [c] ou son égal OC, ajoûtant GO on a GE > GC, & par conséquent le triangle AEB ou son égal ADB [d] > ACB [e]. *C. Q. F. D.*

a 7. 1.
b Cor. 14. 3.
c 16. 1.
d Cor. 1. 2. 2.
e 2. 4.

THEOREME VIII.

De tous les triangles ABC, ABD *que l'on peut faire dans le même ſegment de cercle* ACDB, *ce ſera celui qui eſt iſocelle qui aura la ſomme de ſes côtés* AC + BC *la plus grande.*



Dans AD prolongé prenez DE = BD; menez CE, CD & prolongez BD au-delà du point D, par exemple, en Q.

L'angle QDC = BAC[a] = ABC[b] = ADC[c], par conſéquent ſi au premier de ces angles on ajoute QDE & au dernier, ADB = QDE[d]

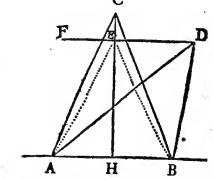
a Cor. 1. 13. 3.
b 6. 1.
c Cor. 9. 3.
d 5. 1.

on aura QDC + QDE = ADC + ADB ou CDE = CDB, c'eſt-à-dire, que les triangles CDE, CDB ſont égaux, puiſque DE = DB [e], que CD eſt commun, & que l'angle compris eſt égal à l'angle compris, donc CE = CB [f]; mais AC + CE < AE [g], donc AC + CB < AD + DB. *C. Q. F. D.*

e Conſt.
f Axiom. 9. 1.
g 15. 1.

THEOREME IX.

De tous les triangles ABC, ABD *ayant même baſe* AB, *& dont la ſomme des autres côtés eſt la même, le plus grand* ABC *eſt celui dont les côtés* AC, BC *ſont égaux.*



Soit CH perpendiculaire & DF

parallele à AB coupant en E, CH prolongé, si besoin est, & menez AE, BE.

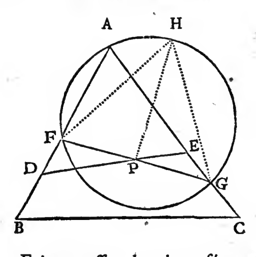
Il est évident que les angles AEF, BED sont égaux, puisqu'à cause des paralleles AB, DF ils sont égaux aux angles EAB, EBA [a] qui sont égaux entr'eux [b], donc la somme de AE + BE est moindre que celle de AD + BD [c] ou son égale AC+BC [d], ainsi le triangle AEB qui est renfermé dans ACB doit être plus petit que lui [e], donc enfin ADB=AEB [f] doit être aussi moindre que ACB.

a 8. 1.
b *Axiom.* 9. 1.
c *Theor.* 4.
d *Hip.*
e *Axiom.* 2. 1.
f *Cor.* 1. 2. 2.

C. Q. F. D.

THEOREME X.

De toutes les lignes DE, FG *que l'on peut mener pour soustraire du triangle donné* ABC *des triangles égaux* ADE, AFG, *la plus courte sera* DE *qui forme le triangle* ADE *dont les côtés* AD, AE *sont égaux.*



Faites passer la circonférence d'un cercle par les points AFG, divisez en deux également au point P la ligne FG, élevez la perpendiculaire PH, & joignez FH & HG.

Il est évident que FH=GH[a], & conséquemment que le triangle GHF est plus grand que AFG[b] ou son égal ADE[c], donc comme les triangles GHF, ADE sont équiangles, puisqu'ils sont isoceles, & que leurs angles au sommet sont égaux[d], il s'ensuit que la base FG

a Axiom. 9. 1.
b Theor. 9.
c Hipot.
d Cor. 9. 3. & Cor. 8. 10. 1.

du plus grand fera plus grande que la baſe DE du plus petit [e].

C. Q. F. D.

e Cor. 15. 6.

THEOREME XI.

Si on fait paſſer par le point E *donné dans l'angle* BAC *pluſieurs lignes droites* DF, GH *qui aillent ſe terminer aux deux cotés de cet angle ; celle* DF *qui ſe trouvera diviſée en deux également par le point* E, *formera le moindre triangle* ADF.

Soit FI parallele à AB & qui rencontre en I, GH prolongée, ſi beſoin eſt, les triangles FEI, DEG ſont égaux, puiſque FE=DE[a] ; IFE =GDE[b] ; FIE =DGE[b] : mais comme BDF ou ſon égal EFI[b] $<$ EFH[c], il s'enſuit que EI $<$ EH, donc le triangle EFI ou ſon égal GDE $<$ EFH, donc ſi à ces deux triangles inégaux on

a Hipot.
b 8. 1.
c Cor. 6. 10. 1.

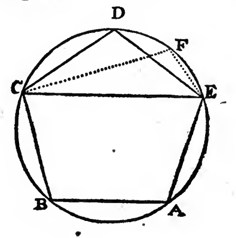
ajoute le quadrilataire commun ADEH, on aura GDE+ADEH=AGH plus grand que EFH+ADEH =ADF [d].

[d] *Axiom. 6. 1.*

C. Q. F. D.

THEOREME XII.

De toutes les figures rectilignes comprises sous le même nombre de côtés & inscrites dans le même cercle, la plus grande est ABCDE *dont tous les côtés sont égaux.*



Car le poligone ABCDE étant

un plus grand, il s'enſuit que le triangle CDE eſt plus grand que tout autre triangle CFE fait dans le même ſegment ; car ſi CFE étoit égal ou plus grand que CDE, il s'enſuivroit que le poligone ABCFE ſeroit égal ou plus grand que ABCDE, ce qui eſt contre la ſuppoſition ; mais le plus grand triangle dans le même ſegment eſt celui dont les côtés ſont égaux[a], donc CD=DE. On verra de même que BC = CD, AB = BC, &c.

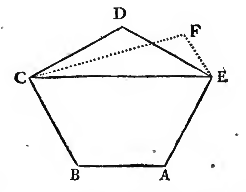
C. Q. F. D.

[a] Theor. 7.

En raiſonnant de la même maniere & partant du Theoreme VIII, on verra que le perimetre d'un poligone régulier, ou dont les côtés ſont égaux, inſcrit dans un cercle, eſt plus grand que celui de tout autre poligone irrégulier du même nombre de côtés & inſcrit dans le même cercle.

THEOREME XIII.

De toutes les figures rectilignes données, comprises sous le même perimetre & sous le même nombre de côtés, la plus grande est ABCDE *dont tous les côtés sont égaux.*



Car si ABCDE est le plus grand poligone possible, le triangle CDE doit être plus grand que tout autre triangle CFE fait sur la même base CE, & dont la somme des côtés est aussi la même ; mais le plus grand

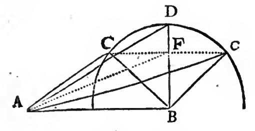
triangle, lorſque la baſe & la ſomme des côtés eſt la même, eſt celui dont les côtés ſont égaux [a]; donc ED=DC. On verra de même que BC =CD, &c.

[a] *Theor.* 9.

C. Q. F. D.

THEOREME XIV.

Le plus grand triangle ABD *qui puiſſe être compris par deux droites* AB, BD *données de longueur & une troiſieme* AD *qui joigne leurs extrêmes, eſt celui qui eſt formé lorſque les deux lignes données ſont un angle droit.*



Soit BD ſitué en BC de façon qu'elle faſſe avec AB un angle

ABC aigu ou obtus, soit C*c* parallele à AB coupant BD en F, & soit menée CA ou *c*A & AF.

Il est évident que BF est perpendiculaire à C*c* [a], donc BF > BC [b] = BD [c], donc enfin ABF ou son égal ABC [d] > que ABD [e].

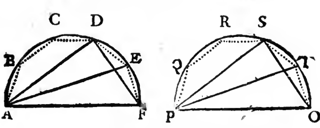
a 1. 1.
b 16. 1.
c *Hip.*
d *Cor.* 1. 2. 2.
e *Axiom.* 2. 1.

C. Q. F. D.

THEOREME XV.

Si tous les côtés d'un poligone ABCDEF *sont donnés de longueur, excepté un seul* AF, *& qu'on demande quelle doit être leur position, afin qu'ils forment le plus grand poligone possible, je dis qu'elle doit être telle, qu'ayant mené des deux extrémités du côté indéterminé* AF *à un des angles* D *du poligone les deux droites* AD, FD, *elles forment un angle droit* ADF.

C



Car si vous dites que ABCDEF est le plus grand poligone possible & que cependant l'angle ADF n'est pas droit, faites l'angle droit PSO compris par PS=AD & par OS=FD; & sur PS & OS faites les figures PSRQ & OST équiangles & égales à ABCD & à FDE.

Le triangle PSO est plus grand que ADF[a]; donc PSRQ étant = ABCD & OST=FDE, tout le poligone PQRSTO est aussi plus grand que tout le poligone ABCDEF, ce qui est contre la supposition.

a *Theor.* 14.

COROLLAIRE.

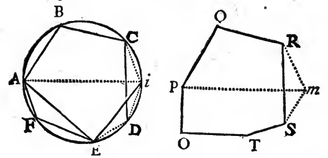
De-là, puisque l'angle dans le demi-cercle est droit [b], il suit

b 11. 3.

que la plus grande figure rectiligne qui puisse être comprise par un nombre déterminé de côtés donnés & par un côté indéterminé doit être inscrite dans un demi cercle dont le diametre est le côté indéterminé.

THEOREME XVI.

Un poligone ABCDEFA *inscrit dans un cercle est plus grand que tout autre poligone non inscrit* PQRSTOP *fait avec les mêmes côtés.*



Menez le diametre Ai, tirez Ci, Di, AE, iE; faites sur RS le triangle $RmS = CiD$, & menez Pm.

Il eſt évident que l'angle AE*i* eſt droit[a], donc par le Theoreme précédent le poligone AFED*i*A eſt plus grand que POTS*m*P. On prouvera de même que ABC*i*A eſt plus grand que PQR*m*P, donc tout le poligone ABC*i*DEFA eſt plus grand que tout le poligone PQR*m*STOP[b]; & ſi de ces deux poligones on ôte les triangles égaux C*i*D, R*m*S reſtera ABCDEFA plus grand que PQRSTOP[c].

a 11. 3.

b Axiom. 3. 1.

c Axiom. 6. 1.

C. Q. F. D.

THEOREME XVII.

De tous les poligones qui ont le même perimetre & le même nombre de côtés, celui dont tous les angles & tous les côtés ſont égaux eſt le plus grand.

Car de tous les poligones dont le perimetre & le nombre des côtés eſt donné, le plus grand eſt celui dont les côtés ſont égaux[a]; mais de tous

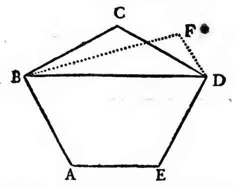
a Theor. 13.

les poligones qui ont un même nombre de côtés égaux, le plus grand est celui qui est inscrit dans le cercle [b];

[b] *Theor.* 16.

donc le plus grand de tous les poligones qui ont le même perimetre & le même nombre de côtés, le plus grand est celui dont les côtés sont égaux & qui est inscrit dans un cercle, c'est-à-dire, celui dont les angles & les côtés sont égaux.

C. Q. F. D.

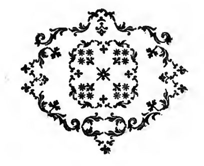


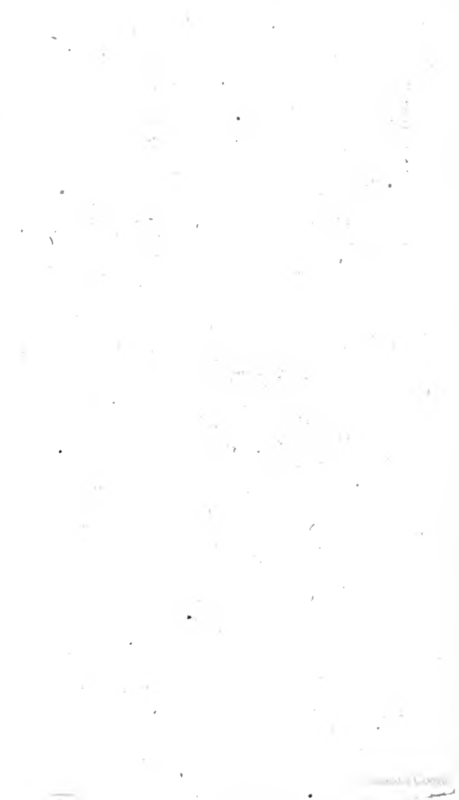
Il faut remarquer que la grandeur du poligone ne dépend pas de l'arrangement des côtés, lorsqu'ils sont d'une longueur déterminée.

Car soit ABCDE le plus grand

poligone que l'on puiſſe faire avec les côtés inégaux AB, BC, CD, DE, EA; ſur BD faites le triangle BDF dont les côtés BF, FD ſoient reſpectivement égaux aux côtés CD, BC; ces triangles étant égaux[a], il s'enſuit que l'entier poligone ABCDE = ABFDE, quoiqu'on ait changé l'ordre & l'arrangement de leurs côtés.

[a] Cor. 2. 19. 1.







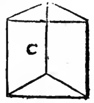
TRAITÉ DES SOLIDES RÉGULIERS.

DÉFINITIONS.

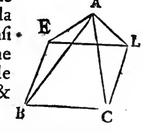
1. UN cube eſt un ſolide terminé par ſix ſurfaces quarrées, paralleles, égales, & qui ſe coupent mutuellement à angles droits, comme A.

2. Un parallelipipede eſt un ſolide terminé par ſix rectangles paralleles dont les oppoſés ſont égaux, & qui ſe coupent mutuellement, ainſi que le cube à angles droits, comme B.

3. Un priſme eſt un ſolide dont les côtés ſont des parallélogrammes, & dont les extrémités ſont des ſurfaces ſemblables, égales & paralleles, comme C.

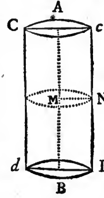


4. Une pyramide eſt un ſolide dont la baſe eſt un poligone & dont les côtés ſont des triangles qui ſe rencontrent par leur ſommet en un point A placé au-deſſus de la baſe; ce point s'appelle le ſommet de la pyramide, ainſi ABCLE eſt une pyramide dont le ſommet eſt A & la baſe BCLE.

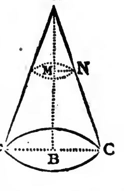


5. Un cylindre DC *cd* eſt un ſolide formé par la révolution d'un rectangle ABCD ſur un des côtés AB ſuppoſé en repos, qu'on appelle l'axe du cylindre. On voit par cette génération, que les extré-

mités du cylindre ſont des cercles; car par ce mouvement de rotation les côtés AC, BD du rectangle ABCD décrivent par leurs extrémités C, D des cercles dont ils ſont les rayons. Il en ſera de même de toute autre ligne MN parallele à BD.



6. Un cone ACc eſt un ſolide formé par la révolution d'un triangle rectangle ABC autour d'un de ſes côtés AB, appellé l'axe du cone. Par ce qui vient d'être dit des baſes des cylindres, on voit que celles des cones ſont auſſi des cercles.

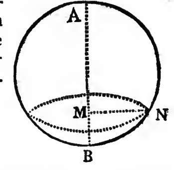


7. Une pyramide tronquée ou un cone tronqué eſt cette partie

qui reste du côté de la base, quand on les a coupés par un plan parallele à leur base.

8. Le côté d'un cone est le côté AC du triangle générateur, & celui du cone tronqué ONcC est la partie NC du côté AC.

9. Une sphere est un solide formé par la révolution d'un demi-cercle ABN autour de son diametre AB.



De ces trois définitions il paroît que si un cylindre, un cone ou une sphere sont coupés par des plans perpendiculaires à leurs axes, les sections seront des cercles ; car, comme je l'ai fait voir dans la cinquieme définition, toutes les lignes comme MN décrivent des cercles par leur rotation : mais ces lignes sont dans le plan de ces sections ;

donc ces ſections ſeront des cercles.

10. La hauteur d'un ſolide eſt la perpendiculaire abaiſſée de ſon ſommet ſur ſa baſe.

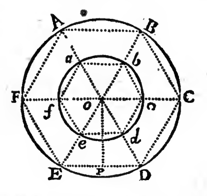
DEMANDE.

Si deux ſolides de même hauteur ſont coupés par des plans paralleles à leurs baſes, & que les ſections qui en proviennent, priſes à égale diſtance des baſes, ſoient ou égales ou dans un rapport conſtant quelconque, ces ſolides entiers ſeront eux-mêmes ou égaux ou dans le même rapport que ces ſections.

Pour voir l'évidence de cette demande, il ne faut que conſidérer ces ſolides comme compoſés d'un nombre infini égal de petites tranches; car alors ſi les tranches de l'un ſont égales aux tranches de l'autre, ces ſolides ſeront égaux; ſi elles ſont doubles, triples, &c. les touts ſeront en même raiſon.

LEMME.

Les peripheries des cercles ſont entr'elles comme leurs diametres, & les cercles ſont comme les quarrés de ces diametres.



Soit ABÇDEF & *abcdef* deux poligones ſemblables inſcrits dans les deux cercles concentriques ABC &c. *abc* &c. & ſoient tirées du centre commun *o* les lignes *oa*A, *ob*B, &c. à cauſe des triangles ſemblables *o*AB, *oab*, on a *o*A : *oa* = AB : *ab* ou comme la ſomme de tous les côtés du grand poligone

à la ſomme de ceux du petit ; on a de plus $oA^2 : oa^2 =$ triangle $oAB : oab$, ou comme le grand poligone eſt au petit ; donc ſi on ſuppoſe que le nombre des côtés de ces poligones devienne infiniment grand, ils ſe confondront avec les cercles dans leſquels ils ſont inſcrits, ſans changer de rapport, & on aura alors $oA : oa$ = la peripherie du grand cercle à celle du petit & $oA^2 : oa^2 =$ le grand cercle eſt au petit.

C. Q. F. D.

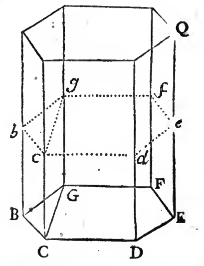
COROLLAIRE.

Si OP eſt perpendiculaire à ED, alors l'aire du triangle OED étant égal à $ED \times \frac{1}{2} PO$, celle de l'entier poligone ſera celle de la ſomme de tous ſes côtés par la moitié de PO ; mais en augmentant le nombre des côtés du poligone à l'infini, il ſe confondra avec le cercle, & l'on pourra prendre la ſomme des côtés pour la circonférence & PO pour le rayon ; donc

l'aire du cercle ſera égale à ſa circonférence multipliée par la moitié de ſon rayon, ou à la moitié de ſa circonférence par le rayon.

THEOREME PREMIER.

Si un priſme BQ *eſt coupé par un plan* cf *parallele à ſa baſe* BCDEFG, *la ſection* bcdefg *ſera égale à cette baſe.*



Joignez C, G & *c*, *g*; puiſque

le plan cf eſt parallele au plan CF; bc ſera parallele à BC, & de plus bB étant parallele à cC, BCcb eſt un parallelogramme, par conſéquent bc = BC. En raiſonnant de même, on verra que bg = BG & cg = CG; donc les triangles bcg & BCG étant mutuellement équilatéraux ſeront égaux; & comme on peut prouver de même l'égalité de tous les autres triangles dans leſquels on peut diviſer les baſes CF & cf, il s'enſuit que la ſection $bcdefg$ = BCDEFG.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

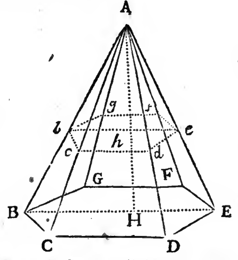
Puiſqu'il ſuit de la définition 9e que la ſection d'un cylindre parallele à ſa baſe eſt un cercle égal à ſa baſe, & que par le Théoreme précédent une ſection d'un priſme parallele à la baſe eſt égale à cette baſe, on en conclura que les cylindres & les priſmes qui ont une même hauteur, ſont entr'eux comme leurs

bases, leurs sections correspondantes étant partout dans la même raison [a]; d'où il est évident que si les bases & les hauteurs sont égales, ces solides seront eux-mêmes égaux.

a Dem.

THEOREME II.

Si une pyramide ABCDEFG *est coupée par un plan parallele à sa base, la section* abcdefg *sera semblable à sa base.*



A cause des paralleles *bg*, BG, BC,

BC, bc, on aura $bc : BC = Ab : AB = bg : BG$ d'où *alternando* on a $bc : bg = BC : BG$: c'eſt-à-dire, que les côtés autour des angles égaux ſont proportionnels; par conſéquent les deux figures BCDEFG, $bcdefg$ ſont ſemblables.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Si AH perpendiculaire à la baſe CF coupe la ſection cf au point h, on aura $AH^2 : ah^2 = AB^2 : ba^2 = BC^2 : bc^2$ & $BC^2 : bc^2$ comme le poligone CF[a] eſt au poligone cf; d'où l'on voit que les ſections d'une pyramide paralleles à ſa baſe ſont entre elles comme les quarrés de leurs diſtances au ſommet de la pyramide.

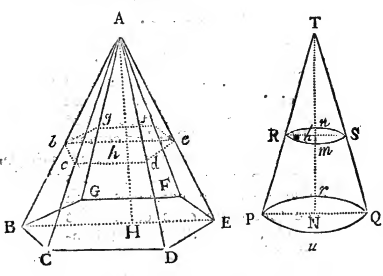
a Theor. 19, 4.



O

THEOREME III.

Les pyramides & les cones dont les hauteurs sont égales, sont comme leurs bases.



Soit *bcdefg* & R *m* S *n* deux sections d'une pyramide & d'un cone paralleles à leurs bases, & qui en soient à égale distance, puisque les hauteurs AH, TN sont égales, A*h*, T*h* par la supposition

seront aussi égales ; mais $AH^2 : Ah^2 = BCDEFG : bcdefg$ & $= TN^2 (AH^2) : Th^2 (Ah^2) = PN^2 : Rh^2 = Pu\ Qr : Rm\ Sn$; donc $AH^2 : Ah^2 = P\ u\ Q\ r : R\ m\ S\ n$; donc enfin $BCDEFG : bcdefg = P\ u\ Q\ r : R\ m\ S\ n$ & *alternando* la base de la pyramide, est à la base du cone comme la section de la pyramide est la section du cone ; donc les sections de ces deux solides étant à égale distance de leurs bases dans la raison constante de ces mêmes bases, les solides entiers seront aussi dans le même raport.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

L'égalité des pyramides & des cones qui ont des hauteurs & des bases égales suit de ce théoreme.



THEOREME IV.

Un cube qui a même base qu'une pyramide quarrée, & qui a une hauteur double, est égal à six fois cette pyramide.*

Car si du centre du cube on mene des lignes droites à ses huit angles, on les divisera en six pyramides quarrées égales qui auront pour base les six faces du cube, & pour hauteur la moitié de celle du cube.

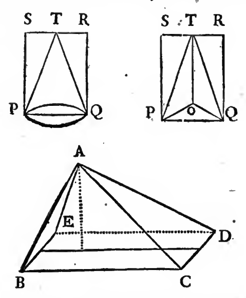
COROLLAIRE.

Il suit de-là qu'une pyramide quarrée dont la hauteur est la moitié du côté de sa base, est le tiers du prisme circonscrit ou qui aura même base & même hauteur; puisqu'un tel prisme seroit la moitié du cube qui auroit même base, & qui par le théoreme précédent est égal à six fois cette pyramide.

* C'est-à-dire, dont la base est un quarré.

THEOREME V.

*T*OUTE *pyramide* POQT *ou tout cone* PQT *eſt le tiers du priſme ou du cylindre circonſcrit* PSRQ.



Soit une pyramide quarrée ABCDE dont la hauteur ſoit égale à celle de la pyramide ou du cone propoſés & qui ne ſoit que la moitié du côté ED de ſa baſe.

Par le corollaire précédent ; cette pyramide sera le tiers du prisme circonscrit. Maintenant la pyramide ABEDC : à la pyramide TOPQ = la base BD : à la base POQ ; de plus le prisme sur BD est au prisme POQ = la base BD : à la base POQ donc la pyramide ABEDC : à la pyramide TPOQ = le prisme sur BD : au prisme sur POQ ; mais la pyramide ABEDC est le tiers du prisme sur BD : donc la pyramide TPOQ est aussi le tiers du prisme sur POQ. De même la pyramide ABEDC : au cone TPQ = la base BEDC : à la base PQ [a] ; de plus le prisme sur BD : au cylindre sur PQ = [b] la base BD : à la base PQ ; donc &c.

a Theor. 3.

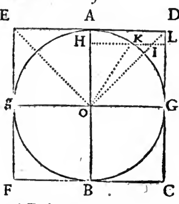
b Coro. Theor. 1.

C. Q. F. D.



THEOREME VI.

Une sphere est les deux tiers de son cylindre circonscrit.



Soit AB l'axe autour duquel la sphere & le cylindre sont formés par la rotation du demi-cercle AGB & du rectangle ABCD. Soit HL perpendiculaire à AB & qui rencontre la peripherie du demi-cercle en K, du centre O menés OK & OD ; puisque $AD = OA$ on aura $OH = HI$, & conséquemment HI^2 ou $OH^2 = OK^2 - HK^2 = HL^2 - HK^2$; (d'où il

eſt évident (puiſque les cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons) que le cercle décrit par HI ou la ſection du cone formé par la rotation du triangle AOD eſt égale à la différence des cercles décrits par HL & HK ; ou à l'anneau décrit par KL qui eſt la ſection du ſolide qui reſte quand on a ſouſtrait la ſphere du cylindre circonſcrit ; en quelque point de la ligne OA qu'on mene HL la démonſtration ſera la même ; par conſéquent la ſection de l'anneau KL ſera partout égale à celle du cone AOD qui lui répond ; & le ſolide formé par les excès de HL ſur HK ſera égal au cone AOD, mais ce cone eſt le tiers du cylindre GDE*g* ; donc l'excès du cylindre GDE*g* ſur la demi-ſphere, qui lui eſt égal en ſera auſſi le tiers, & par conſéquent la demi-ſphere en ſera les deux tiers, & toute la ſphere ſera les deux tiers de tout le cylindre CDEF qui lui eſt circonſcrit.

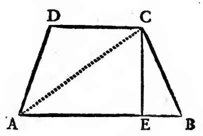
C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

On voit par-là qu'un cone, une demi ſphere & un cylindre qui ont même baſe & même hauteur ſont entr'eux comme les trois nombres 1. 2. 3.

LEMME.

Un quadrilatataire ABCD qui a deux côtés AB, CD paralleles, eſt égal à un rectangle compris ſous la ſomme de ces côtés & la moitié de leur diſtance perpendiculaire CE.



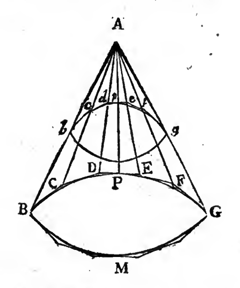
Menez la diagonale AC, alors vous aurez le triangle $ACB = \frac{1}{2}$ $CE \times AB$ & le triangle $ADC = \frac{1}{2}$ $CE \times DC$; donc le quadrilataire. Total $ABCD = \frac{1}{2} CE \times AB + \frac{1}{2}$

$CE \times DC = \frac{1}{2} CE \times AB + DC.$

C. Q. F. D.

THEOREME VII.

La surface, ou la somme ae t ous les côtés d'une pyramide réguciere est égale au rectangle sous le perimetre de sa base, & la moitié du côté du cone qui lui est inscrit.



Soit BCDE, &c. la base de la

pyramide, & BPGM celle du cone inſcrit, du point P où le côté DE de la pyramide touche la baſe du cone, menez AP qui eſt égal à AB, puiſque tous les points de la baſe du cone ſont également éloignés de ſon ſommet A. Le triangle ADE qui eſt un des côtés de la pyramide étant $= \frac{1}{2} AP \times DE = \frac{1}{2} AB \times DE$ & tous les autres côtés de la pyramide étant pareillement égaux à un rectangle ſous leur baſe particuliere & $\frac{1}{2}$ AB, il s'enſuit que la ſomme de tous ces côtés ou la ſurface totale de la pyramide $= \frac{1}{2} AB \times DE + EF + EG +$, &c. $= \frac{1}{2}$ AB par l'entier perimetre de la baſe.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. I.

Il ſuit de-là que la ſomme de tous les côtés, ou la ſurface d'une pyramide tronquée, eſt égale à un rectangle de la ſomme des perimetres de ſes deux extrémités

par la moitié de la longueur d'un de ses côtés : car laire $DEed$ [a] $= \frac{1}{2} Pp \times \overline{DE + de}$ ou $\frac{1}{2} Bb \times \overline{DE + de}$, l'aire de tous les côtés sera par conséquent égale à $\frac{1}{2} Bb \times \overline{DE + de + EF + ef +}$ &c.

a Lem. précéd.

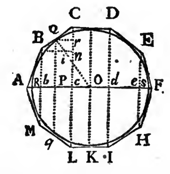
COROLLAIRE II.

Quel que soit le nombre des côtes de la pyramide, il sera toujours vrai que sa surface est égale au rectangle du perimetre de sa base par la moitié du côté du cone inscrit ; mais comme en augmentant de plus en plus les côtés de la pyramide elle se confond enfin avec le cone, il s'ensuit que la surface des cones est, ainsi que celle des pyramides, égale au perimetre de leur base par la moitié de leur côté. Il en est de même de la surface des cones tronqués qui est égale à la somme des perimetres de leurs extrémités par la moitié de leur côté Bb ; d'où il suit que la surface convexe d'un cylindre est égale à la somme des

perimetres de ſes deux baſes par la moitié de ſa hauteur, ou au perimetre de l'une de ſes baſes par toute ſa hauteur, parce que ſes deux baſes ſont égales.

THEOREME VIII.

Si on ſuppoſe qu'un poligone régulier ABCDE *circonſcrit à un cercle* RQSq *tourne avec ce cercle autour du diametre* AF, *la ſurface du ſolide formée par la révolution du poligone ſera égale au rectangle de la circonférence* RQSq *du cercle inſcrit, par ſon diametre* AF.



Menez du centre O au point

de contact Q du côté BC du polygone, le rayon OQ; tirez BbM, QPq, CcL perpendiculaires à AF, & BN, Qr perpendiculaires à CL.

On remarquera d'abord que $2PQ = Bb + Cc$, car Bb, iP, nc étant égaux par la construction; $2iP = Bb + nc$; de plus $iQ = nr$ & à rC; donc $2iP + 2iQ = 2PQ = Bb + nc + Nr + rC = Bb + Cc$.

Maintenant le solide engendré par la révolution du plan $BbcC$ est un cone tronqué dont la surface extérieure est égale au rectangle de $\frac{1}{2}$ BC par la somme de deux peripheries décrites par Bb & Cc = par ce qui a été démontré ci-dessus, au double de la peripherie décrite par PQ; donc cette surface convexe $= \frac{1}{2} BC \times 2$ periph. $Qq = BC \times$ periph. Qq. Mais à cause des triangles semblables OPQ, BnC on a $BC : Bn$ $(bc) = OQ : PQ =$ periph. $RQSq$: periph. Qq; donc $BC \times$ periph. $Qq = bc \times$ periph. $RQSq$,

= à la ſurface convexe engendrée par BC. En procédant de la même maniere on verra que la ſurface produite par tout autre côté $CD = Cd \times$ periph. $RQSq$; donc la ſurface du ſolide total $= Ab + bc + cd +$ &c. $\times$ periph. $RQSq$ $= AF \times$ periph. $RQSq$.

C. Q. F. D.

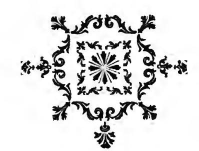
COROLLAIRE I.

Il eſt évident qu'en augmentant toujours le nombre des côtês du poligone générateur, il approchera de plus en plus du cercle qui lui eſt inſcrit & qui eſt ſa limite; donc puiſque la ſurface du ſolide produit par la révolution de çe poligone autour de ſon axe AF eſt égale à $AF \times$ periph. $RQSq$, la ſurface de la ſphere produite par le cercle inſcrit ſera égale elle-même au rectangle de ſon axe RS par la periph. $RQSq$; & la ſurface d'un ſegment quel-

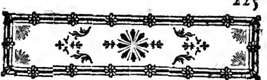
conque = à sa hauteur X la circonférence de la sphere, puisque la surface du solide CBAML qui répond à un segment dont la hauteur est RC = A *c* X periph. RQS*q* par ce qui a été prouvé par ce dernier Théoreme.

COROLLAIRE II.

Il suit de-là que la surface d'une sphere est égale à quatre fois son cercle générateur ; puisque ce cercle = $\frac{1}{4}$ RS X periph. RQS*q*.



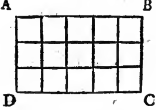
DE



DE LA MESURE *DES SURFACES* ET DES SOLIDES.

ON meſure une grandeur quelconque avec une autre grandeur de même eſpece, comme une ligne avec une ligne, une ſurface avec une ſurface, & un ſolide avec un ſolide.

Le nombre qui exprime combien de fois la grandeur qui ſert de meſure eſt contenue dans la meſurée, en indique la valeur.



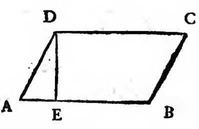


Ainſi ſi la grandeur que l'on

veut mesurer est un rectangle ABCD, & que le petit quarré P dont le côté vaut un pied, un pouce, &c. soit la mesure convenue, le nombre qui exprimera combien de fois ce petit quarré est contenu dans le rectangle, sera la valeur en pieds, pouces &c. de la surface du rectangle : de sorte que si sa longueur DC étoit de cinq pouces, & sa hauteur AD de trois, la valeur de sa surface seroit de trois fois cinq, ou de quinze pouces quarrés, ainsi qu'on peut le voir dans la Figure.

De-là il est aisé de voir que pour trouver la valeur de la surface d'un rectangle, il faut ajouter les parties dans lesquelles sa longueur est divisée par la mesure choisie, autant de fois qu'on trouvera de pareilles parties dans sa hauteur, c'est-à-dire, qu'on multipliera sa longueur par sa hauteur, & le produit de cette multiplication sera la valeur du rectangle.

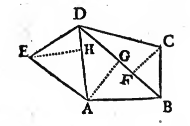
On déduira de cette méthode celle de mesurer tout parallelograme ABCD, ou tout triangle



ADB quelconque, puisqu'on sçait que la premiere de ces figures est égale à un rectangle de même base & de même hauteur, & que la seconde est égale à la moitié d'un tel rectangle. Donc en multipliant la base par la perpendiculaire, vous aurez la valeur du parallelograme, & celle du triangle en multipliant la base par la moitié de la perpendiculaire.

De la méthode de mesurer les triangles, on tirera celle de mesurer un rectiligne de figure quelconque, puisqu'en le divisant en triangles, & cherchant la valeur

de chaque triangle en particulier, la ſomme de toutes ces valeurs ſera celle du rectiligne. Ainſi ſi on diviſe en triangles la figure



ABCDE par les lignes AD, BD dont la premiere vaille 16 pouces & la ſeconde 20 ; que de plus les perpendiculaires CF, AG, EH vaillent 8, 12 & 16 pouces, la valeur des triangles $\left\{\begin{matrix}\text{ABD}\\\text{BCD}\\\text{ADE}\end{matrix}\right\}$ étant $\left\{\begin{matrix}80\\120\\80\end{matrix}\right\}$ 280 pouces quarrés, il eſt évident que toute la figure ABCDE vaudra 280 pouces quarrés.

Si les baſes & les perpendiculaires de ces triangles ſont exprimées par des fractions ou par des nombres fort grands, on abrégera l'opération en trouvant tout d'un

coup la valeur des triangles qui ont une base commune. Ainsi dans le dernier exemple on aura la valeur du trapeze ABCD en multipliant la moitié de la somme des perpendiculaires AG, BF = 10 par la base BD = 20, le produit sera = 200, auquel ajoutant 80 pour la valeur du triangle AED, on aura comme ci-dessus 280 pour la valeur de toute la figure ABCDE. Mais si le poligone proposé étoit régulier, c'est-à-dire, si tous ses angles & ses côtés étoient égaux, il suffiroit, pour avoir sa valeur par une seule opération, de multiplier la somme de tous les côtés par la moitié de la perpendiculaire tirée du centre du poligone sur un des côtés : ce qui est évident par le corollaire du premier lemme du Traité précédent.

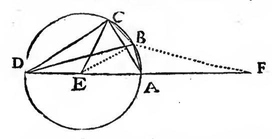
Après avoir montré la méthode de trouver la valeur de la surface des figures rectilignes, nous allons dire un mot sur celle que l'on doit

employer pour trouver les peripheries & les aires des cercles.

Les Géometres ont vainement cherché jusqu'à present une méthode pour trouver une ligne droite qui fut exactement égale à la circonférence d'un cercle ; mais cependant ils ont imaginé plusieurs moyens pour approcher assez exactement de sa vraie valeur. Celle que je vais proposer n'est pas une des plus courtes, mais comme cependant elle ne tient qu'à des principes fort clairs & fort simples, je vais l'expliquer ici en la faisant précéder du lemme suivant.

LEMME.

Si AD est un diametre, AB, BC deux arcs égaux du même cercle, & DB, DC les cordes des suppléments de ces arcs au demi-cercle, on aura $DB^2 = \frac{1}{2} AD \times DC + \frac{1}{2} AD^2$.



Dans DA prolongé, prenez AF = DC ; menez ensuite BF, BA, BC & le rayon CE, & EB.

Puisque l'angle extérieur FAB du trapeze ABCD est égal à l'interne opposé DCB, [a] que AF = DC & AB = [b] CB les triangles FAB, DCB seront égaux ; par conséquent FB sera = DB, & l'angle F [c] = FDB = DBE ; d'où l'on voit que les triangles isoceles DEB, DBF étant equiangles, on aura DE ou $\frac{1}{2}$ AD : DB = DB : DF ou DC + AD ; donc on aura enfin $DB^2 = \frac{1}{2} AD \times DC + \frac{1}{2} AD^2$.

a *Cor.* 1. 13. 3.
b *Hipot.*
c 6. 1.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

De-là si l'on suppose le diametre AD = 2 la corde DB sera égale

à $\sqrt{DC \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{DC + 2}$ d'où l'on voit *que si l'on ajoute à la corde du supplément d'un arc à la demi-circonférence le nombre 2. la racine quarrée de la somme sera la valeur de la corde du supplément de la moitié de cet arc.*

Maintenant pour appliquer cette proposition à la recherche de la valeur de la circonférence & de l'aire du cercle, supposons que l'arc ABC = $\frac{1}{3}$ de la demi-circonférence, l'angle AEC sera égal au $\frac{1}{3}$ de deux angles droits, & le triangle AEC étant équilateral, [a] la corde AC sera égale au rayon AE ou EC, & puisque ACD est un angle droit $DC^2 = AD^2 - AC^2 =$ par la supposition à $4 - 1 = 3$, & conséquemment $DC = \sqrt{3} =$ 1. 7320508075, &c. Maintenant ayant la corde du supplément au tiers de la demi-circonférence = 1. 7320508075, &c. nous aurons en sous-divisant successivement les arcs, & en suivant la proposition du précédent Corollaire, pour les

[a] 7. Cor. 10. 3.

cordes des fupplémens, les valeurs fuivantes.

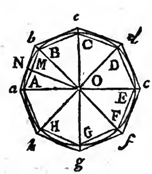
Cordes des Supplémens.

$$\begin{cases} \frac{1}{6} = \sqrt{2 + 1.7320508075} = 1.9318516525 \\ \frac{1}{12} = \sqrt{2 + 1.9318516525} = 1.9828897227 \\ \frac{1}{24} = \sqrt{2 + 1.9828897227} = 1.9957178465 \\ \frac{1}{48} = \sqrt{2 + 1.9957178465} = 1.9989291743 \\ \frac{1}{96} = \sqrt{2 + 1.9989291743} = 1.9997322757 \\ \frac{1}{192} = \sqrt{2 + 1.9997322757} = 1.9999330678 \\ \frac{1}{384} = \sqrt{2 + 1.9999330678.} \; \sqrt{3.9999330678} \end{cases}$$

Puifque ce dernier nombre 3. 9999330678 eft le quarré de la corde du fupplément à la 384eme partie de la demi-circonférence, en le fouftraifant du quarré du diametre=4 nous aurons pour refte 0. 0000669-322 qui eft le quarré de la corde de cet arc & fa racine quarrée=à la corde elle-même$=\sqrt{0.0000669322}$ $=0.0081 8121$. En multipliant ce dernier nombre par 768 = au nombre des côtés du poligone entier, dont la demi-circonférence en contenoit 384, nous aurons le produit 6. 28317 = au perimetre ou à la fomme des côtés du poligone

régulier de 768 côtés inscrit dans le cercle ; mais comme un poligone d'un aussi grand nombre de côtés coincide quasi avec le cercle circonscrit ; 6. 28317 sera la valeur approchée de la circonférence du cercle, son diametre étant=2. ou 3. 1416 son diametre étant=1.

Pour faire voir combien cette valeur approche de la vraie, nous allons calculer le perimetre d'un poligone de 768 côtés circonscrit au cercle qui ne differera de l'inscrit que d'environ une 500000eme. partie ; & comme le cercle est plus grand que l'inscrit, & plus petit que le circonscrit, sa différence de l'un à l'autre ne sera qu'environ la moitié de celle-là.



Soit AB le côté du poligone inscrit dans le cercle que

nous avons trouvé=o. 00818121, ſoit auſſi *a b* le côté d'un autre poligone ſemblable au premier & circonſcrit au cercle. Du centre O menez OM diviſant en deux parties égales AB & *ab* en N & en M.

Puiſque $AM=\frac{1}{2}AB=$ o. 0040906 & $AO=1$, il eſt évident que OM^2 $(AO^2-AM^2)=$ o. 99998327, & par conſéquent $OM=$ o.99999163, d'où l'on tire à cauſe des triangles ſemblables AOB, *aOb*, OM:ON =AB : *ab* ou bien o. 99999163: 1=6. 28317 : 6. 28322 puiſque donc le côté *ab* du poligone circonſcrit = 6. 28322 & celui de l'inſcrit = 6. 28317 leur différence comme nous l'avons dit ci-deſſus = o. 00005.

Ayant ainſi trouvé la valeur de la peripherie, on aura celle de l'aire, puiſqu'elle eſt égale au rectangle de la peripherie par la moitié du rayon [a] = 6. 2832 × o. 5 = 3. 1416.

[a] *Corol. Lem. 1. Traité préc.*

Les peripheries des cercles étant

comme leurs diametres , & les cercles étant eux-mêmes comme les quarrés des diametres[a], il suit que 2 : 6. 2832 ou 1 : 3. 1416 = le diametre est à la circonférence, & que 4 : 3. 1416 ou 1 : 0. 7854 = le quarré du diametre est à l'aire.

Si on n'avoit pas besoin d'avoir une valeur aussi approchée de la circonférence, & qu'on voulût avoir son rapport au diametre en nombres entiers, on pourroit en ce cas employer ceux *d'Archimede*, qui a trouvé le diametre à la peripherie comme 7 à 22, & le quarré du diametre à l'aire comme 14 à 11. Ces rapports different fort peu des précédens ; car si l'on vouloit avoir la valeur de la circonférence, & de l'aire d'un cercle dont le diametre seroit égal à 28, on n'auroit qu'à dire en employant nos rapports 1 : 3. 1416 = 28 : $\frac{3.1416 \times 28}{1}$ = 87. 964, & 1 : 0. 7854 = 784 : $\frac{0.7854 \times 784}{1}$ = 615. 7536 : & en employant ceux *d'Archimede* on trouvera les nombres

a *Lem.* 1. *Traité préc.*

88 & 616 qui, comme on le voit, different fort peu des autres.

En opérant comme nous l'avons fait ci-dessus, on calculera la circonférence & l'aire d'un cercle quelconque : il ne faut qu'observer seulement de mettre dans la premiere proportion pour troisiéme terme la valeur du diametre donné, & dans la seconde son quarré.

La surface convexe d'un cylindre étant égale au produit de la peripherie de sa base par sa hauteur, si on y ajoute la valeur de l'aire de ses deux bases trouvée par la méthode précédente, on aura la surface totale du cylindre.

De même pour avoir la surface d'un cone entier ou d'un cone tronqué, il faut dans le premier cas multiplier la moitié de son côté par la circonférence de la base, & dans le second par la somme des peripheries de ses deux bases.

Pour avoir la surface d'une sphere, il faut multiplier la peripherie de son cercle générateur par le diametre, ou multiplier le

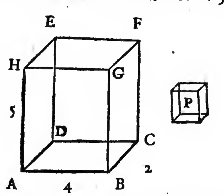
quarré du diametre par 3. 1416. Car puisque le quarré du diametre est à l'aire du cercle comme 4 est à 3. 1416, l'aire X 4 sera = au quarré du diametre X 3. 1416 [a]; mais l'aire X 4 [b] = à la surface de la sphere; donc le quarré du diametre X 3. 1416 = à la surface de la sphere. On aura de même la surface d'un segment de la sphere en multipliant la peripherie du grand cercle par la hauteur du segment. *

a *Theor.* 3. 4.
b *Cor.* 2. *Theor.* 8. *Traité préc.*

Après avoir expliqué la méthode de calculer la surface des solides, nous allons donner celle de mesurer leur solidité.

On remarquera d'abord que de même qu'on s'est servi d'un quarré dont le côté représentoit l'unité pour mesurer les surfaces, on employe pour la mesure des solides un cube dont le côté représente aussi l'unité.

* Tout ce que l'on vient de dire sur la mesure des surfaces, & ce que l'on va dire sur celles des solidités, est fondé sur les Théoremes du Traité précédent.



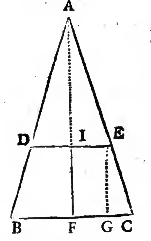
Soit AF un parallelipipede dont on veuille avoir la ſolidité, & ſoit le cube P qui doive ſervir de meſure & dont le côté vaille un pouce quarré. Soit de plus la longueur AB de la baſe = à quatre pouces, ſa largeur BC = à deux, & la hauteur AH du parallelipipede = 5.

Puiſque l'aire de la baſe AB, CD = 4 X 2 = 8 pouces quarrés, il s'enſuit que ſi la hauteur AH n'étoit que d'un pouce, alors la ſolidité du parallelipipede ſeroit exactement de 8 pouces cubiques, puiſque ſur chacun de 8 pouces quarrés de la baſe on ne pourroit placer que le cube P. Donc ſi la

hauteur AH=5 pouces, on pourra placer cinq fois autant de couches de pouces cubes ſur la baſe ABCD, comme on en a placé quand AH étoit égal à un pouce ; mais 5 fois 8 =40 ; donc la ſolidité du parallelipipede eſt de 40 pouces cubes. On voit par le détail de cette opération que pour avoir la ſolidité d'un parallelipipede il faut *multiplier l'aire de ſa baſe par ſa hauteur.* On ſe ſervira de la même regle pour trouver la ſolidité des priſmes & des cylindres, puiſque les priſmes, les cylindres & les parallelipipedes qui ont des baſes & des hauteurs égales ſont égaux.

Les pyramides & les cones étant = au $\frac{1}{3}$ des priſmes & des cylindres de même baſe & de même hauteur, il ſuit de ce qu'on vient de dire qu'on aura leur ſolidité en *multipliant l'aire de leur baſe par le tiers de leur hauteur.*

Le



Le cone tronqué BDEC est égal au cone entier ABC, moins le cone supérieur ADE; donc pour en connoître la solidité il faut avoir celle des cones ABC & ADE, qui par ce que nous venons de démontrer est égale à l'aire de leur base par le tiers de leur hauteur. Or comme leur base est connue puisque les deux extrémités du cone tronqué le sont, il ne faut que chercher leur hauteur, ce que l'on fera de la maniere suivante.

Menez AF perpendiculaire à BC & EG parallele à AF, les triangles EGC, AIE étant semblables GC : EI = GE (FI) : AI, c'est-à-dire, *la différence des rayons des extrémités du cone tronqué est au rayon de la plus petite, comme la hauteur du*

cone tronqué est à celle du cone supérieur.

La même regle servira pour calculer la hauteur des pyramides tronquées, la démonstration étant la même.

La sphere étant égale au $\frac{2}{3}$ du cylindre circonscrit, on aura sa solidité égale au produit de l'aire du grand cercle par le $\frac{2}{3}$ du diametre ou à celui du cube du diametre par la fraction decimale 0. 5236; car l'aire du grand cercle étant au quarré du diametre comme 0. 7854 est à l'unité, elle est égale à $D^2 \times 0.7854$, & en multipliant cette quantité par $\frac{2}{3}$ D, on a pour la solidité de la sphere $\frac{2}{3} D \times D^2 \times 0.7854 = D^3 \times 0.5236$.

Si l'on veut avoir la solidité de la portion d'une sphere formée par la révolution de la figure OHKG [a], *il faut prendre la somme de deux fois l'aire de la base formée par le rayon* OG, *& d'une fois celle de la base formée par le rayon* HK, *& multiplier le tout par le*

[a] Figure du Theor. 6.

tiers de la hauteur OH; ou bien en employant la valeur de l'aire des cercles trouvée ci-dessus, *on prendra la somme de deux fois le quarré du diametre* AB, *& du quarré du diametre* MK, *qu'on multipliera par le tiers de la hauteur* OH *& par la fraction* 0.7854.

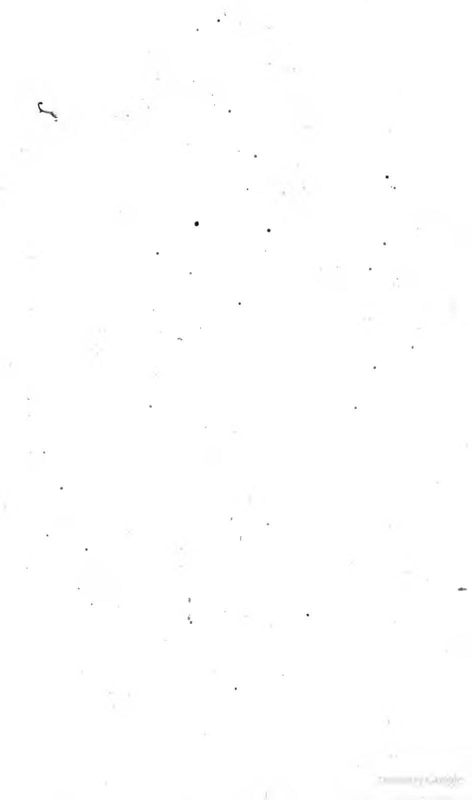
Car si on se rappelle la démonstration du sixiéme Théoreme du traité précédent, on verra que la somme de ce solide, & du cone formé par la révolution du triangle OHI est égale au cylindre formé par la révolution du parallelogramme OHLG; or ce cylindre est égal à l'aire de sa base par sa hauteur, donc en nommant cette aire A celle de la base du cone, a & S, le solide cherché, on aura $A \times OH = S + a \times \frac{OH}{3}$ & en transposant $S = A \times OH - a \times \frac{OH}{3}$; ou bien pour n'avoir qu'un seul multiplicateur commun aux deux termes du second membre $(3A - a)\frac{OH}{3} = S$, si maintenant on nomme

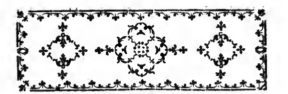
a l'aire de la baſe du cone formé par le triangle OHK, on aura par le ſixiéme Théoreme $A = a + a$ ou $A - a = a$; ſubſtituant donc dans la précédente équation a, à la place de $A - a$, on aura $S = (2A + a)\frac{OH}{3}$, d'où l'on tire la regle que j'ai donnée.

Pour trouver la ſolidité du ſegment de la ſphere formée par la figure HAK, il ſuffit de ſouſtraire le ſolide que nous venons de trouver de l'hémiſphere entier que nous avons démontré être égal aux deux tiers du cylindre circonſcrit, c'eſt-à-dire $= 2A \times \frac{OA}{3}$, (ou bien OA étant $= OH + HA$) $= 2A \times \frac{OH}{3} + 2A \times \frac{HA}{3}$; ainſi le ſegement $= 2A \times \frac{OH}{3} + 2A \times \frac{HA}{3} - 2A \times \frac{OH}{3} - a \times \frac{OH}{3} = 2A \times \frac{HA}{3} - a \times \frac{OH}{3}$, ce qui indique que pour avoir la valeur du ſegment d'une ſphere *il faut ſouſtraire de deux fois l'aire du grand cercle multipliée par le tiers de la hauteur du ſegment, l'aire*

l'aire du cercle de sa base multipliée par le tiers de la différence du rayon de la sphere & de la hauteur du segment. Ou bien en employant les mêmes valeurs des aires ci-dessus ; *de deux fois le quarré du diametre de la sphere multiplié par le tiers de la hauteur du segment, il faut soustraire le quarré du diametre de la base du segment multiplié par le tiers de la différence du rayon de la sphere & de la hauteur du segment, & multiplier le tout par la fraction* 0. 7854.

Fin de la Mesure des Surfaces & des Solides.

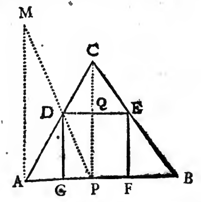




CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DE *DIVERS PROBLÊMES.*

PROBLEME PREMIER.

DECRIRE un quarré DEFG *dans un triangle donné* ABC.



Du sommet C du triangle don-

né menez ſur AB la perpendiculaire CP, faites AM parallele à PC & égale à AB ; par les points P, M menez PM qui coupera AC en D, de ce point D menez DE parallele à AB, & enfin abaiſſez ſur AB les perpendiculaires DG, EF.

A cauſe des triangles ſemblables APM, GPD & ACB, DCE on aura AP : AM ou AB = PG ou QD : DG [a] d'une part, & de l'autre CP : CQ = AB : DE [b] ; mais CP : CQ = AP : DQ, donc AP : AB = DQ : DE, donc DG = DE ; mais par la conſtruction il eſt évident que la figure DGFE eſt un rectangle, donc c'eſt un quarré [c].

C. Q. F. D.

a 5. 4.

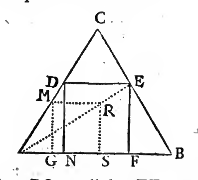
b 12. 4.

c Défin. 24. 1.

AUTRE CONSTRUCTION.

Du point M pris ſur l'un des côtés menez ſur la baſe AB la perpendiculaire MG, faites MR perpendiculaire & égale à cette même MG, par les points A, R menez AR qui ira rencontrer l'au-

tre côté du triangle à un point E, menez DE, EF, DN la premiere parallele & les deux autres perpendiculaires à AB, & DNFE sera le quarré demandé.



Tirez RS parallele à EF; à cause des triangles semblables ARS, AFE & AMR, ADE on a RS ou MG : EF = AR : AE = MR : DE, donc MG & MR étant égaux [a] EF, & DE le seront aussi.

[a] *Conft.*

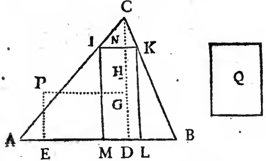
C. Q. F. D.

Nota. On peut par l'une & l'autre de ces méthodes inscrire dans un triangle donné un rectangle dont les côtés soient en raison donnée; car au lieu de faire dans la premiere AM = AB & dans la se-

conde MR=MG, il n'y avoit qu'à les prendre dans une raison donnée, le reste de la construction auroit été la même.

PROBLEME II.

INSCRIRE dans un triangle donné ABC *un rectangle* IKLM *égal à un rectiligne donné* Q.



Du sommet C du triangle abaissez sur sa base AB la perpendiculaire CD, prenez ED = ½ AB sur laquelle vous ferez le rectangle DEFG = Q [a], divisez CD en deux parties égales au point H, prenez HN moyenne proportionelle entre

[a] 17. 6.

DH & HG; DN sera la hauteur du rectangle requis, & IK parallele à AB sera sa base.

Puisque $DH : HN = HN : HG$ [b] donc $HN^2 = DH \times HG$, & conséquemment $DH^2 - HN^2 = DH^2 - DH \times HG$; mais $DH^2 - HN^2 = \overline{DH+HN} \times \overline{DH-HN}$ [c] $= DN \times CN$, & $DH^2 - DH \times HG = DH \times DG$ [d] d'où on tire $DN \times CN = DH \times DG$, & conséquemment $DN : DG = DH : CN$ [e]; mais DH ou $\frac{1}{2}$ CD : CN = ED ou $\frac{1}{2}$ AB : IK [f], donc *ex æquo* $DN : DG = ED : IK$, donc enfin $DN \times IK = DG \times ED = Q$ [g].

b *Const.*

c 6. 2.

d 4. 2.

e 3. 4.

f 12. 4.

g *Const.*

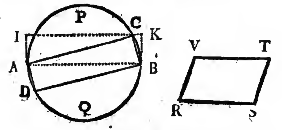
C. Q. F. D.

Nota. Lorsque le point G tombe au-dessus du point H, le rectangle FGDE sera plus grand que la moitié du triangle donné; parce que ED = $\frac{1}{2}$ AB & DH = $\frac{1}{2}$ CD[g]; ce qui rend dans ce cas le probleme impossible.



PROBLEME III.

INSCRIRE dans un cercle donné APBQ *un rectangle égal à une figure rectiligne donnée* RSTU.



Sur le diametre AB décrivez le rectangle ABKI = RSTV [a], du point C où le côté KI coupe la péripherie du cercle, menez aux deux extrémités du diametre AB les cordes CB, CA, enfin menez parallelement à chacune BD, AD & ABCD sera le rectangle requis.

L'angle ACB est droit [b], donc ABCD est un rectangle puisque AC, BD, ainsi que AD, BC, sont paralleles ; de plus il est égal à 2ACB [c] = ABKI [d] = RSTV [e].

C. Q. F. D.

a 7. 6.

b 11. 3.

c 41. 1.

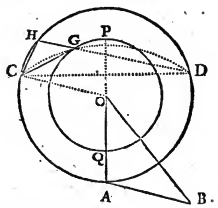
d Cor. 2. 7. 2.

e Const.

Nota. Lorſque le côté IK du reſtangle ABKI ne touche ni ne coupe la circonférence du cercle donné, mais tombe entierement au-deſſus, le probleme ſera impoſſible parce qu'alors le ſommet C du triangle ACB ſera hors du cercle & conſéquemment n'y ſera pas inſcrit.

PROBLEME IV.

INSCRIRE un triangle ſemblable à un triangle donné OAB, *entre les péripheries de deux cercles concentriques donnés* ACD, PQG.



Tirez le rayon OC parallele au

côté AB du triangle donné, & la ſoutendante CD perpendiculaire à AOP ſur laquelle décrivez un ſegment de cercle capable de l'angle BOP[a], & du point G où la péripherie de ce ſegment coupe celle du plus petit cercle QPG menez GC & GD que vous prolongerez juſques à la rencontre de la circonférence du plus grand cercle en H; joignez C, H & CGH ſera le triangle demandé.

a 17. 5.

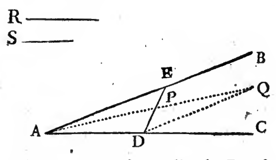
Les angles CGD & POB étant égaux par la conſtruction, leurs ſupplémens CGH & AOB ſeront égaux; de plus les angles CHG, COA ſont égaux, puiſque le premier eſt à la circonférence appuyé ſur l'arc CD double de l'arc CA ſur lequel appuie le ſecond qui eſt au centre[b]; mais cet angle COA =OAB[c] donc les triangles CGH & OAB ſont ſemblables[d].

b 9. 3. c 8. 1. d Cor. 5. 4.

Nota. Ce probleme eſt impoſſible lorſque le ſegment du cercle CGD ne coupe ni ne touche le cercle PQG.

PROBLEME V.

Par un point donné P *tirez une droite* DE, *de maniere que ses deux parties* DP, PE *interceptées par ce point & par deux lignes* AB, AC *données de position, soient dans une raison donnée.*



Soit cette raison celle de R à S du point de concours A, tirez AP sur le prolongement duquel vous prendrez PQ, de maniere qu'il soit à AP dans la raison de S à R[a], tirez QD parallele à AB; enfin par D & par P menez DE, & vous aurez DP : PE = R : S.

a 13. 5.

Puisque QD & BA sont paral-

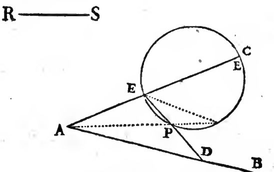
leles, les triangles APE, QPD font équiangles[b]; donc EP : PD = AP : PQ[c] = R : S[d].

b 8. 1.
c 5. 4.
d Conſt.

PROBLEME VI.

Par un point donné P *mener* DE *de maniere que le rectangle de ſes deux parties* DP × PE, *interceptées par le point* P *& par les deux droites* AB, AC *données de poſition, ſoit égal à un quarré donné* RS².

R——S



Du point d'interſection A par P menez AP, ſur le prolongement du quel prenez PQ troiſieme pro-

portionnelle aux deux lignes AP, RS, sur laquelle décrivez un segment de cercle capable de l'angle BAP ; enfin du point E où la peripherie de ce segment coupe la droite AC, menez par P, EPD & vous aurez $EP \times PD = RS^2$. Si on tire QE les triangles ADP, EQP sont semblables ; car l'angle PEQ = DAP [a], & l'angle EPQ = APD [b], donc on aura $AP : DP = PE : QP$ & conséquemment $AP \times QP := DP \times EP$; mais par la construction $AP \times QP = RS^2$, donc $DP \times EP = RS^2$.

[a] *Conſt.*
[b] 5. 1.

C. Q. F. D.

PROBLEME VII.

PAR un point donné P *également éloigné de deux droites* QM & QN *données de position, tirer une droite* RS *qui, terminée par ces deux lignes, soit égale à la droite donnée* AB.

C Q E B R S A P D F G N M H

Joignez Q, P; sur la donnée AB, décrivez un segment de cercle ACB capable de l'angle NQM[a]; achevez le cercle, tirez BD terminée par la péripherie & faisant avec AB l'angle ABD = NQP; faites BH perpendiculaire à BD & égal à PQ, sur BH comme diametre décrivez le cercle FHGB par le centre duquel tirez DG qui en coupera la péripherie en F; du centre D par F décrivez un arc de cercle qui ira couper AB en quelque point E; enfin tirez DEC & RPS de maniere que l'angle QPS soit = CEB.

a 17. 5.

Du point C ou DC rencontre

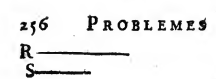
la péripherie, tirez CA & CB: l'angle ABD étant égal à $\frac{1}{2}$ NQM $= \frac{1}{2}$ ACB [b] & ACD étant = ABD [c], il eſt évident que DCB & ACD ſont = $\frac{1}{2}$ ACB & que les triangles DCB, DBE ſont ſemblables, puiſqu'ils ont un angle commun D & DCB = DBE, donc DC : DB = DB : DE & DC X DE = DB² = DG X DF [d], mais DE = DF [b], donc DC = DG & EC = BH = QP [b]; ainſi puiſque dans les triangles équiangles ACE, RQP & BCE, SQP les côtés CE & PQ ſont égaux, on aura auſſi AE = RP & BE = SP, donc AB (AE+BE) = RS (RP+RS).

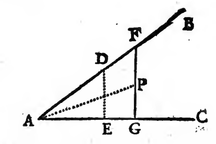
b *Conſt.*
c *Cor. 9. 3.*
d *Cor. 17. 3.*

C. Q. F. D.

PROBLEME VIII.

Un point P *étant donné entre deux droites* AB, AC *données de poſition, tirer par ce point une droite* FG *qui retranche des deux lignes* AB, AC *les parties* AF, AG *qui ſoient en raiſon donnée.*





Soit la raiſon donnée celle de R à S; ſur AB prenez AD = R & ſur AC prenez AE = S, tirez DE & FPG qui lui ſoit parallele.

R : S = AD : AE [a] = AF : AG [b].

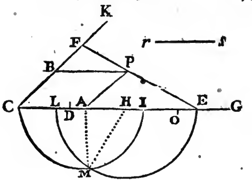
a Conſt.
b 5. 4.

C. Q. F. D.

PROBLEME IX.

Par un point donné P *mener une droite* EPF *qui coupe les deux lignes* CG, CK *données de poſition, de maniere que la différence des deux ſegmens* CE, CF *ſoit égale à une droite donnée r s.*

Menez



Menez PA & PB paralleles à CK & CG ; sur CG prenez CD & AI égaux chacun à CB & DO égal à la difference donnée *rs* ; divisez AO en deux également au point H, & élevez au point A la perpendiculaire AM qui rencontrera au point M le demi cercle décrit sur CI ; tirez HM & prenez HE qui lui soit égal ; enfin menez par E & par P la ligne EPF.

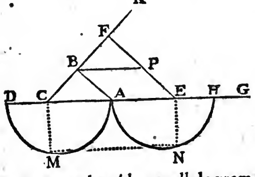
Si du centre H & avec le rayon HE on décrit le demi cercle EML, il est évident qu'alors $AE \times AL$ $(= AM^2 = AC \times AI = AC \times CB)$ $= BP \times AP$. De plus les triangles AEP, BPF étant semblables par

R

la conſtruction on a AE × BF = BP × AP, donc BF = AL; mais puiſque par la conſtruction HE = HL & que HO = HA on aura AL ou ſon égal BF = OE, donc en ajoutant de part & d'autre les quantités égales CB, CD on aura BF + CB, ou CF = CD + OE = CE − DO = CE − *rs*. *C. Q. F. D.*

PROBLEME X.

Par un point donné P *mener une droite* EPF *qui coupe les droites* CG, CK *données de poſition de maniere que les deux ſegmens* CE, CF *faſſent une ſomme donnée.*



Ayant achevé le parallelogram-

me ACBP comme dans le problême précédent, prenez dans CG prolongé $CD = CB$ & DH égal à la somme donnée ; décrivez deux demi cercles sur DA, & sur AH ; élevez CM perpendiculaire à DG, & du point M où elle coupe le demi cercle DMA menez MN parallele à DG qui coupera l'autre demi cercle en quelque point N, de ce point N abaissez NE perpendiculaire à DG ; & enfin menez EPF.

Puisque $AE \times EH = (EN^2 = CM^2 = CA \times CD = CA \times CB = BP \times AP =) AE \times BF$, il suit que $EH = BF$, & conséquemment que $CE + CF (= CE + CD + EH) = DH$.

C. Q. F. D.

PROBLEME XI.

Trois lignes droites AB, AC, AD *qui se rencontrent en un point* A *étant données de position, tirer*

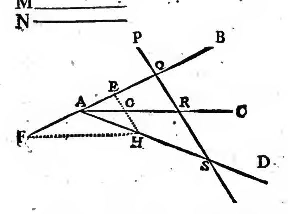
du point donné P *la droite* PS, *de maniere que les parties* QR, RS *interceptées par ces trois lignes soient en raison donnée.*

Soit cette raison celle de M à N.

Sur AB prolongée prenez AF = N & AE = M, menez FH parallele à AC qui rencontrera AD en H, joignez EH par EH & menez-lui parallelement PS.

M

N

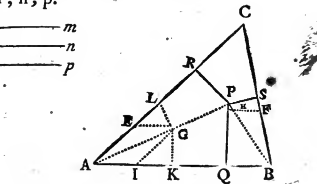


A cause des triangles semblables AEG, FEH, & HAE, SAQ on a AE (M) : AF (N) = EG : GH = QR : RS.

C. Q. F. D.

PROBLEME XII.

Trouver un point donné P *duquel trois perpendiculaires abaissées sur les trois droites* AB, AC, BC *données de position, soient respectivement comme les trois lignes données* m, n, p.



Prenez AE, BF égale chacune à *m ;* menez EG parallele à AB & égal à *n* & FH égal à *p*, & parallele aussi à AB par G & par H, menez AP, BP & le point de concours P sera le point cherché.

Abaissez sur les côtés du triangle ABC les perpendiculaires GL,

GK, PR, PQ, PS, & menez GI paralleles à AC.

L'angle LEG étant = LAK = GIK & L & K étant droits, il s'ensuit que les triangles EGL, GIK sont semblables, on aura donc IG ou AE : EG=KG : LG = PQ : PR; mais AE : EG = $m:n$, donc PQ : PR = $m:n$; en faisant la même construction & le même raisonnement, on verra que PQ : PS=$m:p$,

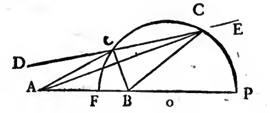
C. Q. F. D.

Nota. Si l'on vouloit que les lignes tirées du point P fissent avec les trois lignes données des angles donnés, il suffiroit pour remplir cette nouvelle condition de tirer GL & GK, de maniere qu'elles fissent avec AC & AB les angles donnés.

PROBLEME XIII.

De deux points donnés A, B *tirer deux droites* AC, BC *qui se ren-*

contrent ſur une droite donnée de poſition DE *& qui ſoient en raiſon donnée.*



Par les points donnés A, B, tirez la droite indéfinie AP, prenez AF & BF dans la raiſon donnée ; faites FO : AF = BF : AF − BF, & du centre O avec le rayon OF décrivez un demi cercle FCCP qui rencontrera DE en C, enfin joignez A, C & B, C.

CB : CA = BF : AF[a] qui par la conſtruction ſont dans la raiſon donnée. *C. Q. F. D.*

a 15. 4.

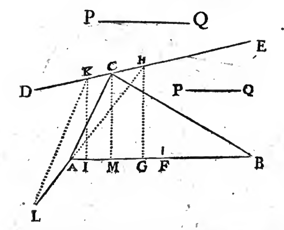
PROBLEME XIV.

De deux points donnés A & B, *tirer deux droites* AC, BC *qui aillent ſe rencontrer ſur une ligne* DE



donnée de position & qui ayent une différence donnée.

Soit PQ cette différence:



Tirez AB que vous diviserez en deux également en F ; prenez FG troisieme proportionnelle à 2 AB & PQ ; faites GI = PQ, & tirez GH & IK perpendiculaires à AB & rencontrant DE en H & en K ; joignez H, A & du centre K avec un rayon = AB décrivez un arc de cercle qui coupe en L, HA prolongée, si besoin est, tirez LK & AC qui lui soit parallele & qui rencontre DE en C, enfin menez BC.

Soit CM perpendiculaire à AB. A cause des paralleles LK, CA & KI, CM, HG[a], on a KL ou AB[a] : AC (=KH : CH=GI ou) PQ[a] : GM, & par conséquent $AB \times GM = PQ \times AC$[b]; de plus $2\,AB : PQ = PQ : FG$[a], donc $AB \times FG = \frac{1}{2} PQ^2$[b]; ainsi $\overline{AB \times GM} + \overline{AB \times FG} = PQ \times AC + \frac{1}{2} PQ^2$[c] ou $AB \times FM$[d] $= PQ \times AC + \frac{1}{2} PQ^2$ ou $2\,AB \times FM = 2\,AC \times PQ + PQ^2$; mais $2\,AB \times FM = BC^2 - AC^2$[e], donc $2\,AC \times PQ + PQ^2 = BC^2 - AC^2$, donc $AC^2 + 2\,AC \times PQ + PQ^2 = BC^2$, ce qui donne $\overline{AC + PQ}^2 = BC^2$[f] ou $AC + PQ = BC$, ou enfin $BC - AC = PQ$.

a Conſt.

b 3. 4.

c Axiom. 4. 1.

d 4. 2.

e Cor. 8. 2.

f 5. 2.

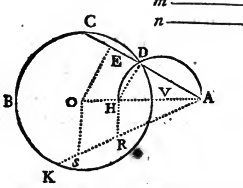
C. Q. F. D.

Nota. On pourroit employer la même conſtruction ſi au lieu de la différence on avoit la ſomme, pourvu qu'elle fut plus grande que la diſtance AB & que le double de la diſtance perpendiculaire du point F à la ligne donnée de poſition ; car autrement le probleme ſeroit impoſſible g.

g 15. & 16. 1.

PROBLEME XV.

D'un point donné A *hors d'un cercle* BCV *donné de grandeur & de position, tirer une droite* AC *ensorte que la partie* DC *inscrite dans le cercle soit à la partie extérieure* AD *dans la raison donnée de* n *à* m.



Tirez AK à volonté sur laquelle vous prendrez AR = m & RS = $\frac{1}{2}$ n, menez OA du centre O ; joignez O, S, menez HR parallele à OS rencontrant AO en H ; sur AH décrivez un demi cercle qui coupera le cercle donné en D, enfin par D menez ADC.

Abaissez sur AC la perpendiculaire OE, & joignez H, D.

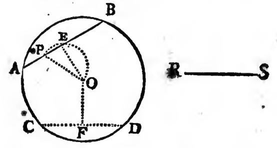
DH est parallele à EO puisque l'angle ADH est droit [a]; on a donc AD : DE (= AH : HO = AR : RS) = $m : \frac{1}{2} n$ [b], donc enfin AD : DC = $m : n$ parce que DC = 2 DE [c].

a 11. 3.
b Const.
c 1. 3.

C. Q. F. D.

PROBLEME XVI.

Par un point P *donné dans un cercle* ABDC, *tirer une droite* AB *terminée dans la péripherie par ses deux extrémités & qui soit égale à une ligne donnée* RS.



Inscrivez dans le cercle une soustendante CD = RS [a], du centre O

a 15. 5.

abaissez sur cette sous-tendante une perpendiculaire OF ; tirez OP sur laquelle vous décrirez le demi cercle POE & dans lequel vous inscrirez OE = OF, enfin par P & E menez AB.

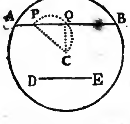
Puisque l'angle AEO est droit [b] & que OE = OF [c], il est évident que AB = CD [d] = RS [e].

b 31. 3.
c *Conſt.*
d 2. 3.

C. Q. F. D.

PROBLEME XVII.

PAR un point donné P *dans le cercle* C *tirer une ligne* AB *terminée par la peripherie, de maniere que la différence des parties* AP , PB *soit égale à la droite* DE.



Du centre C au point P tirez CP, sur laquelle décrivez le demi cercle PQC, inscrivez-lui PQ = ½ DE [a], & par P & Q tirez AB.

a 15. 5.

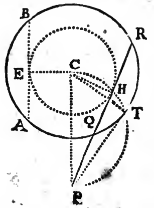
Tirez CQ qui sera perpendiculaire à AB [b]; puisque AQ=BQ [c], on aura BP−AP=BQ+PQ−AQ+PQ=2PQ=DE [d].

C. Q. F. D.

[b] 11. 3.
[c] 1. 2.
[d] Const.

PROBLEME XVIII.

Du point donné P *hors du cercle* ARQ *donné de grandeur & de position, tirer une droite* PR *terminée par la péripherie concave, de maniere qu'elle soit divisée en* Q *par la péripherie convexe en moyenne & extrême raison, c'est-à-dire, que* PR *soit à* QR *comme* QR *est à* PQ.



Menez CP du centre C au point P, sur lequel décrivez le demi cercle CPT qui coupe en quelque point T le cercle donné, joi-

gnez PT & inscrivez dans le cercle donné une sous-tendante AB = PT [a], abaissez sur cette soustendante AB la perpendiculaire CE, & du centre C avec le rayon CE décrivez un autre cercle EH qui coupera le demi cercle CPT en H, enfin par ce point H menez PHR.

a 15. 5.

Joignez C, T & C, H.

Les angles PTC & PHC étant droits [b], il est évident que PT & PR sont tangentes aux deux cercles concentriques ART & EH [c], & que $QR = (AB)$ [d] $= PT$ [e]; mais $PR \times PQ = PT^2$ [f] $= QR^2$, donc $PR : QR = QR : PQ$.

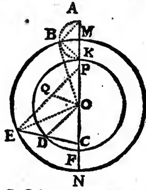
C. Q. F. D.

b 11. 3.
c Défin. 9. 3.
d 2. 3.
e Conſt.
f Cor. 17. 3.

PROBLEME XIX.

D*eux cercles concentriques* MEN, KDF *étant donnés avec un diametre* MN, *tirer une droite* EC *qui fasse avec ce diametre un angle donné, & dont les parties* CD, ED *intercep-*

tées par le diametre & par les péripheries des deux cercles, soient dans la raison donnée de m à n.



Soit QON l'angle donné. Sur OK prolongé prenez KA, de maniere qu'il soit au rayon OK comme *n* à *m* [a], décrivez sur KA un segment de cercle capable de l'angle QOP [b], du point B de son intersection avec le cercle MEN menez BA auquel vous menerez parallelement le rayon OD, enfin par D, vous menerez EC parallele à QO.

[a] 13. 5.

[b] 17. 5.

Tirez BK, BO, EO, ainsi que EP parallele à DO, qui rencontrera OQ & OM en Q & en P.

Dans les triangles AKB, POQ on a ABK = POQ [c] & KAB = OPQ [d], donc ces triangles sont équiangles, donc leurs extérieurs OKB, EQO sont égaux [e]; dans les triangles OKB, EQO, on a EQ = (OD) [f] = OK & OE = OB, donc OQ = KB, donc les triangles POQ, ABK, qu'on a déja prouvé équiangles, sont égaux, & conséquemment PQ = AK; maintenant à cause des paralleles OD, QP on a QO : CD = PQ : OD, c'est-à-dire, ED [f] : CD = AK : OK = $n : m$ [c].

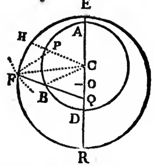
c Conſt.
d 8. 1.
e 10. 1.
f 25. 1.

C. Q. F. D.

PROBLEME XX.

Tirer une droite FQ *qui faſſe un angle donné avec un diametre* ER *paſſant par les centres de deux cercles excentriques, & qui ſoit telle que ſa partie* FB, *compriſe par les deux peripheries, ſoient d'une longueur donnée.*

Du



Du centre C du cercle ABD menez CH qui fasse avec ER l'angle donné; prenez CP égal à la longueur donnée, & du point P comme centre avec le rayon CA décrivez un arc de cercle qui coupera la péripherie EFR en quelque point F, enfin menez FQ parallele à CH.

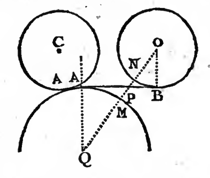
Menez PF, CF & CB; dans les triangles CBF, CPF, on a CB = PF; l'angle CFB = FCP & CF est commun, donc BF = CP = à la longueur donné.

C. Q. F. D.



PROBLEME XXI.

Par un point donné P *tirer une ligne* AB *terminée par les peripheries de deux cercles* C *&* O *donnés de grandeur & de position, de maniere que les parties* PA, PB *soient dans la raison donnée de* m *à* n.



Du centre O menez par P la ligne indéfinie OPQ sur laquelle vous prendrez PQ, de façon qu'elle soit à $PO = m : n$ [a]; prenez aussi QM dans la même proportion avec le rayon ON; du centre Q avec le rayon QM décrivez un cercle qui coupera ou touchera le cercle C dans quelque

[a] 13. 5.

point A *, enfin par A & par P menez APB qui rencontrera sur la péripherie du cercle O, OB, menée parallelement à AQ.

Les triangles APQ, OPB sont équiangles, puisque AQ, OB sont paralleles ; on a donc PQ : PO = AP : BP & QP : OP = AQ ou QM : OB, mais QP : OP = QM : ON [b], donc OB = [c] ON, donc le point B tombera sur la circonférence du cercle O ; de plus AP : BP = (PQ : PO) = m à n [b].

b *Const.*

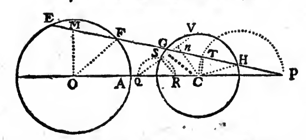
c *Axiom.* 3. 4.

C. Q. F. D.

PROBLEME XXII.

D'un point P *donné sur une droite qui passe par les centres* C & O *de deux cercles* OEA, CVH *donnés de grandeur & de position, tirer une ligne* PE *dont les parties* EF, GH *comprises dans ces cercles soient égales.*

* Cette interfection ou cet attouchement est une suite de la position du point P qui, par les conditions du Problême, doit être telle, que la droite AB qui passe par ce point, puisse être terminée par les circonférences des deux cercles donnés.



Faites CQ=rayon OA, & prenez CR : CQ = PC : PO [a]; décrivez sur QR & sur PC les demi-cercles QSR & CTP; par S où le premier coupe le cercle CHG, menez QV & dans le second appliquez au point C la corde CT = $\frac{1}{2}$ SV [b]; enfin par P & par T menez PE.

[a] 13. 5.
[b] 15. 5.

Menez OM & C*n*, perpendiculaire à PE & à QV, tirez aussi OF, RS, CS & CH.

Les angles QSR, PTC étant droits [c], les lignes RS, C*n* & CT, OM feront paralleles, donc S*n* : Q*n* = CR : CQ = PC : PO [d]; mais CT : OM = P C : PO [e], donc S*n* : Q*n* = CT : OM [f], donc puisque S*n* = $\frac{1}{2}$ SV [g] = CT [d], on aura Q*n* = OM & OF étant = CQ [d], FM sera=C*n* [h]; mais les triangles CTH,

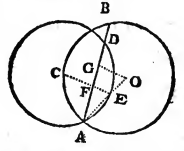
[c] 11. 3.
[d] Conſt.
[e] 5. 4.
[f] Axiom.
[g] 5. 4. 1. 3.
[h] 7. 1.

SnC ſont égaux[h], donc HT=(Cn) = FM, & conſéquemment FE (2FM)[g] = HG (2HT)[g].

C. Q. F. D.

PROBLEME XXIII.

Du point d'interſection A *de deux cercles donnés* C *&* O, *menez une ligne* AB *qui ſoit telle que les ſouſtendantes* AB, AD *ſoient dans la raiſon donnée de* m *à* n.



Du centre O menez OA, ſur laquelle vous prendrez AE : AO = $m : n$[a]; du centre C menez CE & du point A, AB qui lui ſoit perpendiculaire. Abaiſſez ſur AB la perpendiculaire OG.

a 13. 34

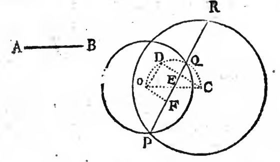
A cause des paralleles EF, OG on a $AE : AO = AF : AG = 2\,AF : 2\,AG = AD : AB$ [b].

b 13.

C. Q. F. D.

PROBLEME XXIV.

Du point d'interſection P *de deux cercles donnés* O, C, *tirer une droite* PR, *qui ſoit telle que la partie* QR *interceptée par les deux périphéries, ſoit égale à une ligne donnée* AB.



Sur la ligne OC qui joint les deux centres, décrivez un demi

cercle ODC dans lequel appliquez OD $= \frac{1}{2}$ AB [a], & menez PR parallele à OD.

Tirez CD & OF qui lui soit parallele, l'une & l'autre rencontreront PR en E & en F.

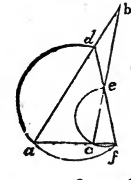
L'angle ODC étant droit [b], & PR parallele à DO [c], les angles E & F seront aussi droits [d] & EF sera = DO ; donc PE − PF étant = DO = $\frac{1}{2}$ AB, il est évident que 2 PE (PR) − 2 PF (PQ) = AB ou QR = AB.

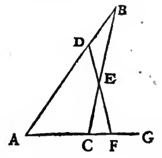
C. Q. F. D.

a 15. 5.
b 11. 3.
c Const.
d 23. 1.

PROBLEME XXV.

Tirer une ligne DF *qui coupe trois lignes* AB, AG *&* BC, *données de position, de maniere que les parties* DE, EF *interceptées par ces lignes soient respectivement égales aux deux lignes données* d e, e f.





Sur *e f* décrivez un ſegment de cercle *f c e*, capable de l'angle GCE [a]; décrivez de même ſur *d f* un autre ſegment capable de l'angle A[a]; enſuite menez *a f* de maniere que la partie *ac*, compriſe entre les deux périphéries, ſoit égale à AC [b]; joignez *a*, *d*, prenez AF= *af*, AD = *a d*, & tirez DF.

a 17. 5.

b Prob. précéd.

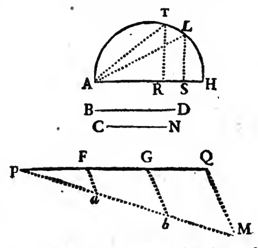
Le triangle FAD = *f a d*, puiſque AF= *a f*; AD= *a d*, & A= *a*[c], donc *f*= F & DF = *d f*; de plus ſi on tire *c e* les triangles *f c e*, FCE ſeront égaux, puiſque *c* = C[c], F = *f* comme on vient de le prouver & *c f*= CF [d], donc *f e*= FE & *d e*=DE [d], puiſqu'on a déja prouvé que *f d*= FD. *C. Q. F. D.*

c Conſt.

d Axiom. 5. 1.

PROBLEME XXVI.

DIVISER une ligne donnée PQ *en trois parties, de façon que leurs quarrés soient dans la raison donnée des trois lignes* AH, BD & CN.



Sur AH décrivez le demi cercle ATH, & prenez AS=BD & AR =CN ; élevez en S & en R les perpendiculaires SL, RT, joignez L, A & T, A.

Par le point P menez l'indéfinie PM faisant avec PQ un angle à

volonté, sur laquelle vous prendrez $Pa = AH$, $ab = AL$ & $bM = AT$; enfin ayant joint QM menez-lui parallelement aF & bG.

Puisque $PF : FG = Pa(AH) : ab(AL)$, on aura $PF^2 : FG^2 = AH^2 : AL^2$ [a]; mais $AL^2 = AH \times AS$ [b], donc $PF^2 : FG^2 = AH^2 : AH \times AS =$ [c] $AH : AS(BD)$ [d], on prouvera de même que $PF^2 : GQ^2 = AH : CN$.

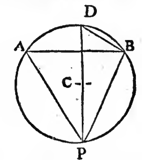
a Cor. 1. 9. 4.
b Cor. 11. 4.
c 1. 4.
d Conft.

C. Q. F. D.

Nota. On pourroit par la même méthode diviser la ligne PQ de maniere que les quarrés, les triangles, ou toutes autres figures semblables faites sur les parties de la division fussent en raison donnée.

PROBLEME XXVII.

Trois points A, B, C, *étant donnés en trouver une quatriéme* P *ou trois lignes tirées des points précédens, allant se rencontrer, fassent ensemble des angles donnés.*



Menez AB sur lequel décrivez un segment de cercle capable de l'angle que doivent former par leur rencontre les lignes tirées des points A & B ; achevez le cercle & faites l'angle ABD = à l'angle que doivent faire les lignes tirées des points A & C , & du point D où BD rencontre la peripherie ; menez par C , DCP qui rencontrera la peripherie au point P requis.

Menez AP , BP.

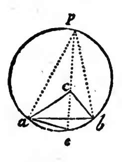
L'angle APB = à l'angle que doivent faire les lignes tirées des points A & B [a], & APD = ABD [b] = à l'angle que doivent faire les droites menées des points A & C [a].

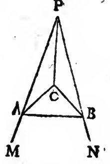
C. Q. F. D.

[a] *Conſt.*
[b] *Cor. 9. 3.*

PROBLEME XXVIII.

D'un point donné C *mener sur deux droites* PM, PN *données de position deux lignes* CA, CB, *de maniere qu'elles forment avec la ligne* AB *qui joint leurs extrémités un triangle* ABC, *semblable à un autre triangle donné* a b c.





Sur ab soit un segment de cercle capable de l'angle MPN, achevez le cercle; tirez PC & ae de façon que bae soient = CPN; du point e ou ae coupe la circonférence; menez par c la ligne ec, qui rencontre encore la circonférence en p; faites les angles PCA, PCB ref-

pectivement égaux aux angles pca, pcb & menez AB.

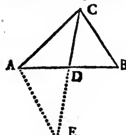
Tirez pa, pb, l'angle bae (CPB)[a] $= cpb$[b]; donc APB étant $= apb$[a], les angles restans APC & ape seront conséquemment égaux, d'où puisque PCA$=pca$ & PCB$=pcb$[a], les triangles APC, apc & BPC, bpc sont équiangles; ainsi on a AC : ac = PC : pc = CB : cb; donc AC : ac = BC : bc; donc les triangles ACB, acb sont équiangles[c].

C. Q. F. D.

a Conſt.
b Cor. 9. 3.
c 5. 4.

PROBLEME XXIX.

Décrire un triangle ACB *dont les deux côtés* AC, CB *& la ligne* CD *tirée du ſommet* C *au milieu de la baſe* AB *ſoient données.*



Sur la ligne indéfinie CE prenez CD, DE égaux à la ligne donnée. Des points C & E comme

centres avec des rayons respectivement égaux aux deux côtés donnés, décrivez deux arcs qui se couperont en quelque point A; par A & D tirez AB faites DB = AD, tirez CA & CB, & ABC sera le triangle requis.

Menez AE, puisque CD=DE[a], DB = DA[a] & l'angle CDB = EDA[b]; CB sera = AE[c].

a Conſt.
b 5. 1.
c Axiom. 9. 1.

C. Q. F. D.

PROBLEME XXX.

DÉCRIRE un triangle dont l'angle vertical, & la différence des côtés qui le comprennent soient données, & dont la ligne droite tirée du sommet sur la base & faisant des angles donnés avec les côtés, sera aussi d'une longueur donnée.

C E P F G T K

Faites GCK = à l'angle vertical donné & tirez CT par le ſommet C, de façon que les angles GCT, KCT ſoient égaux aux angles donnés; ſur CT prenez CP = à la longueur donnée, & par P menez EPF, de façon que CF − CE ſoient = à la différence donnée [a]. Il eſt évident par la conſtruction que ECF eſt le triangle requis.

a Prob. 10.

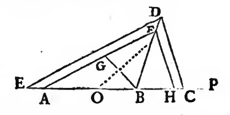
Si au lieu de la différence des côtés on avoit donné la ſomme, la conſtruction ſeroit la même en obſervant ſeulement de tirer EF par P, de façon que CE + CF fut égal à la ſomme donnée [b].

b Prob. 9.

PROBLEME XXXI.

DÉCRIRE un triangle dont la différence des angles ſur la baſe ſoit

égale à la moitié de l'angle du sommet, & dont la différence des côtés, ainsi que celle des segmens de la base (faits par une perpendiculaire menée du sommet) soient données.



Sur la ligne indéfinie EP prenez BC = à la différence des côtés, & BA = à la différence des segmens de la base. Sur BC faites un triangle isocelle BCD, dont les côtés BD, CD soient égaux à BA ; faites l'angle BDE = BDC ; tirez AF parallele à ED qui rencontrera BD en F ; tirez aussi FH parallele à DC rencontrant EP en H, & AFH sera le triangle demandé.

Sur FA prenez FG=FB; joignez B, G, & abaissez la perpendiculaire FO.

Puisque AF est parallele à ED & FH à DC; que de plus l'angle BDE

BDE = CDB il s'ensuit que l'angle AFB = HFB[a], donc AHF (HBF)[b] − HAF étant = AFB[c] est égal à la moitié de l'angle vertical AFH[d]. Ce qui est la premiere condition du probleme.

a Cor. 1. 8. 1.
b 6. 1.
c 10. 1.
d Const.

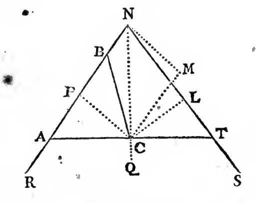
Comme les triangles isocelles BFG, BFH ont l'angle BFG = BFH & le côté BF commun, ils auront non-seulement leurs bases BG, BH égales & leurs angles BGF, HBF égaux, mais encore leurs supplémens AGB, ABF; donc les triangles AGB, ABF, & BFH, BDC étant équiangles, on aura BG : AG = BF : AB ou BD = BH : BC, donc BG étant = BH, AG sera = BC, donc AF − FH = AG = BC. Seconde condition. Enfin BFH étant un triangle isocelle BO = OH, donc AO − OH = AB.

C. Q. F. D.

PROBLEME XXXII.

DÉCRIRE *un triangle dont un angle, la somme des deux côtés*

qui le renferment & la perpendiculaire abaissée de cet angle sur le côté opposé soient données.



Faites les angles RNQ , SNQ égaux chacun à la moitié de l'angle donné ; faites NM perpendiculaire à NR & égale à la perpendiculaire donnée ; tirez MC parallele à NR & rencontrant NQ en C ; par ce point C menez AT égale à la somme des côtés , & terminée par NR & NS [a]; enfin menez CB de façon que l'angle ACB soit = ANT, & ACB sera le triangle demandé.

[a] *Probl.* 7.

Abaiſſez ſur NR & NS les perpendiculaires CP & CL.

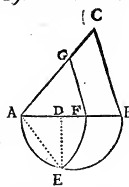
L'angle ACB = à l'angle donné [b], & PC = NM = [c] à la perpendiculaire donnée [b]. De plus les triangles ACB, ATN, ayant l'angle ACB = ANT [b] & A commun auront auſſi les angles PBC, CTL égaux; dans les triangles CPB, CLT on a PBC = CTL, les angles P & L droits [b] & CP = CL, puiſque l'angle PNC = LNC [b] & que CN eſt commun; donc CB = CT & AC + CB = AC + CT = AT.

b *Conſt.*
c 23. 1.

C. Q. F. D.

PROBLEME XXXIII.

TIRER une droite FG *parallele au côté* BC *d'un triangle donné* ABC, *de maniere que le triangle retranché* AGF *ſoit au total* ACB *en raiſon donnée.*



Soit la raison donnée celle de AB à AD, sur AB décrivez le demi cercle AEB, élevez au point D la perpendiculaire ED; du point A par E décrivez un arc de cercle coupant AB en F, & de ce point F menez FG parallele à BC.

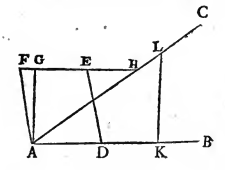
Menez AE; alors AE^2 ou $AF^2 = AD \times AB$[a]. Mais $ABC : AFG = (AB^2 : AF^2$[b] ou $AD \times AB) = AB : AD$[c]; donc $ABC : AFG = AB : AD$.

a 11. 4.
b 17. 4.
c 1. 4.

C. Q. F. D.

PROBLEME XXXIV.

Tirer une droite KL *parallele à une droite* AG *donnée de position, & qui coupe deux autres lignes données aussi de position* AC, AB, *de maniere que le triangle* AKL *formé par ces trois lignes soit égal à un rectangle donné* ADEF.



Prolongez FE autant qu'il ſera néceſſaire pour couper AG en G, & AC en H ; prenez enſuite ſur AB, AK moyenne proportionnelle entre GH & 2 EF, & tirez KL parallele à AG.

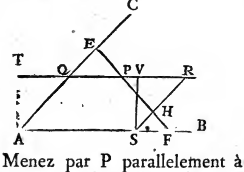
Les triangles AKL, HGA étant équiangles [b] ils ſont entr'eux comme AK^2 eſt à GH^2 [a]; mais $AK^2 = GH \times 2\,EF$ [b], donc $AKL : HGA = GH \times 2\,EF : GH^2 = EF : \frac{1}{2}\,GH = EF \times AF\,(ADEF) : \frac{1}{2}\,GH \times AF\,(HGA)$, donc puiſque les conſéquents HGA ne ſont qu'une même quantité, les antécédents AKL, ADEF doivent être néceſſairement égaux.

a 17. 4.
b *Conſt.*

C. Q. F. D.

PROBLEME XXXV.

Par un point donné P *situé entre deux droites données de position* AB, AC, *mener une ligne* EF *ensorte que le triangle* AEF, *qu'elle forme avec ces deux droites, soit égal à un rectangle donné* ST.



Menez par P parallelement à AB, la ligne QPR qui coupe AC en Q ; sur AQ faites le parallelogramme ASRQ = ST [a], & sur SB prenez SF moyenne proportionnelle entre PR + PQ & PR − PQ [b], enfin par F menez FPE.

a 7. 6.

b 14. 5.

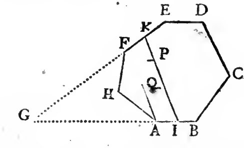
Les triangles SFH, PRH, QPE sont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues puis-

qu'ils sont semblables [c], donc puisque $SF^2 + PQ^2 = PR^2$ [d], on aura SFH + QPE = PRH & en ajoutant de part & d'autre la figure ASHPQ, on aura le triangle AFH = au rectangle ASRQ. *C. Q. F. D.*

c 17. 4.
d *Conft.*

PROBLEME XXXVI.

Mener par un point donné P *&* *parallelement à une droite* AQ *donnée de position, une ligne* IK *qui retranche du polygone* ABCDEFH *une partie* AHFKI *égale à un rectangle donné* MN.



R N Q
M O P

Prolongez BA, EF jusques à leur rencontre en G; sur ON

faites un rectangle égal à la figure AGFH ; ensuite au moyen d'un des deux derniers problemes menez IK de façon que le triangle GKI soit = MQ.

a *Const.* $IGK = MQ$ [a], $AGFH = OQ$ [a], donc $AIKFH = MN$ [b].

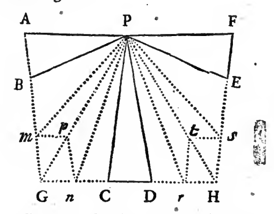
b *Axiom.* 5. 1.

La construction sera à-peu-près la même si on veut diviser le polygone suivant une raison donnée, il suffira de faire un rectangle égal au polygone, de le diviser dans la raison donnée, & ensuite par la construction de ce probleme de retrancher du polygone une partie égale à une des parties du rectangle total.

PROBLEME XXXVII.

Déterminer la position d'un point P *qui soit tel, qu'ayant tiré de ce point des lignes droites aux extrémités des trois lignes* AB, CD, EF, *données de grandeur & de position, elles puissent former trois trian-*

gles APB, CPD, EPF *mutuellement égaux.*



Prenez sur les lignes données prolongées jusqu'à ce qu'elles se coupent en G & en H, $Gm=AB$; $Hs=EF$ & Gn, Hr chacune $= CD$; achevez les parallelogrammes $Gmpn$, $Hrts$ & menez les diagonales Gp, Ht qui prolongées iront se rencontrer au point P demandé.

Menez les lignes PA, PB, P*m*, P*n*, PC, PD, &c. puisque les triangles Gpn, Gpm sont égaux[a]; il s'ensuit que GPn, GPm, sont aussi égaux[b]; mais $CPD = GPn$[b]

a Cor. 1. 2. 2.

b Cor. 2. 2. 2.

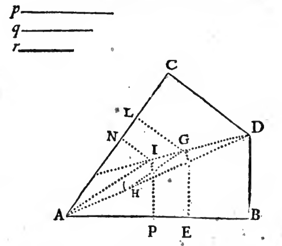
& APB = GPm^b, donc CPD = APB ; on prouvera de même que CPD = FPE.

C. Q. F. D.

Nota. Si on demandoit que les triangles au lieu d'être égaux fussent en raison donnée, il suffiroit alors de prendre Gn : CD = APB : CPD & Hr : CD = EPF : CDD, le reste de la construction seroit la même.

PROBLEME XXXVIII.

Deux lignes droites AB, AC, *qui se rencontrent au point* A *étant données de longueur & de position, déterminer la longueur & la position d'une autre ligne* AI *partant du même point* A, *& qui soit telle que les deux perpendiculaires* IN, IP *qu'on abaisse de son extrémité* I, *sur les deux autres lignes, en retranchent les deux parties* PB, NC *qui soient chacune à cette même* AI *en raison donnée.*



Soit *p*, *q*, *r* les trois lignes qui expriment la raiſon donnée de AI, BP, CN; prenez BE $= q$, CL $= r$ & élevez ſur AB & AC les perpendiculaires BD, EG, CD, LG qui ſe rencontrent en D & en G; menez DA, DG; du centre G avec le rayon *p* décrivez un arc qui coupera AD en quelque point H; joignez HG & menez lui parallelement AI qui rencontrera DG prolongé, s'il le faut, au point demandé I.

A cauſe des paralleles AI, HG;

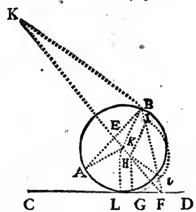
DB, GE; DC, GL; on a AI : GH = (ID : GD) = BP : BE, d'où *alternando*, on a AI : BP = GH : BE = $p : q$ [a], on trouvera de même que AI : CN = $p : r$.

C. Q. F. D.

[a] *Conſt.*

PROBLEME XXXIX.

Décrire un cercle par deux points données A, B, *qui touche une droite* CD *donnée de poſition.*



Tirez AB que vous diviſerez en deux également au point E par la perpendiculaire EF qui rencontre

CD en F ; de quelque point H pris ſur EF abaiſſez ſur CD la perpendiculaire HG, avec laquelle comme rayon vous décrirez du centre H un arc qui coupera la ligne qui joint BF en I ; tirez IH & menez-lui parallelement BK ; du point K où elle coupe ED comme centre, décrivez avec le rayon BK un cercle qui ſera le cercle requis.

Joignez KA & menez KL perpendiculaire à CD. A cauſe des paralleles KL, HG; KB, HI, on aura HG : HI = KL : KB & parce que HG = HI [a] ; KL ſera égal à KB ; mais KA = KB puiſque le côté BE = AE que KE eſt commun & que les angles E ſont droits, donc KL =(KB) = KA, donc les trois points A, B, L ſont ſur la circonférence du cercle décrit.

C. Q. F. D.

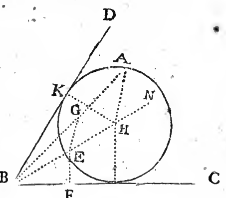
Si on continue l'arc I*i* juſques à ce qu'il coupe BF en *i*, qu'on joigne H*i* & qu'on lui mene parallelement BK, le point K ſera le

[a] Con.

centre d'un autre cercle qui satisfera aux mêmes conditions que le premier, la démonstration en est la même. La même remarque s'applique aux deux problemes suivans.

PROBLEME XL.

Décrire un cercle par un point donné A, *& qui touche deux droites données de position* BD, BC.



Joignez par BA, le point de concours B de deux lignes données, & le point A; divisez en deux

également l'angle DBC par l'indéfinie BN, de laquelle par quelque point E vous abaisserez sur BC la perpendiculaire EF; du point E comme centre avec le rayon EF décrivez un arc G qui coupe BA en G; joignez EG, menez-lui AH parallelement, & du point H où elle coupe BN décrivez avec le rayon AH un cercle qui sera le cercle demandé.

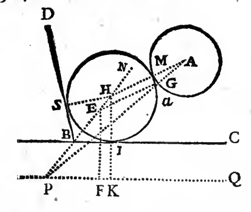
Abaissez sur BC & BD les perpendiculaires HI & HK qui sont évidemment égales[a]; de plus à cause des paralleles EG, HA; EF, HI, on a EF : HI = EG : HA; donc les antécédens EF, EG étant égaux, les conséquens HI, HA le seront aussi.

a *Conſt.* & *Coro.* 10. 1.

C. Q. F. D.

PROBLEME XLI.

DÉCRIRE un cercle HSI *qui touche deux droites* BC & BD *données de position, & un cercle* A a M *donné de grandeur & de position.*



Menez PQ parallele à BC, & à la diſtance du rayon A*a* ; par le point de concours B des deux lignes données, menez NBP qui diviſe en deux également l'angle DBC, & qui rencontre PQ en P; d'un point E pris ſur PN abaiſſez ſur PQ la perpendiculaire EF ; du même point comme centre décrivez avec le rayon EF un arc qui coupe en G la ligne qui joint P, A ; menez GE & du point A, AH qui lui ſoit parallele, & qui coupera en quelque point M la circonférence du cercle donné, & en H la ligne PN ; enfin du point

point H comme centre décrivez par M un cercle qui ſera le cercle requis.

Abaiſſez ſur BD & ſur PQ les perpendiculaires HS & HK.

A cauſe des paralleles FE, HK; EG, HA; on a EF : HK = EG : HA & puiſque EF = EG [a] on a HK = HA; donc HM = HI puiſque AM = IK [a]. De plus HI = HS [b]; donc HM, HI, HS ſont égaux.

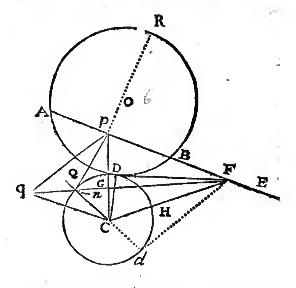
[a] *Conſt.*

[b] *Conſt. & Coro.* 10. 1.

C. Q. F. D.

PROBLEME XLII.

Décrire par deux points donnés A, B *un cercle qui touche un autre cercle* CDH *donné de grandeur & de poſition.*



Par A & par B menez l'indéfinie AE, du centre C du cercle donné ; menez CP qui divise AB en deux également au point P.

De ce point P comme centre, décrivez avec le rayon AP un arc *n*Q qui coupe en Q le cercle donné CHD ; par ce point Q menez QF perpendiculaire à CP ; du point F où elle coupe l'indéfinie AE menez FD tangante au cercle CHD ; enfin par les trois points

A, B, D menés un cercle [a] qui sera le cercle demandé.

[a] 14. 3.

Tirez CF, CD, CQ & PQ. $PF^2 = PG^2 + FG^2$ & $PQ^2 = PG^2 + QG^2$; donc $PF^2 - PQ^2 = FG^2 - QG^2$, on verra de même que $FC^2 - CQ^2 = FG^2 - QG^2$; donc $PF^2 - PQ^2 = FC^2 - CQ^2$, & à cause de $PQ = AP$ [b] & de $CQ = CD$ [b], on a $PF^2 - AP^2 = FC^2 - CD^2$; mais $PF^2 - AP^2 = \overline{PF + AP} \times \overline{PF - AP}$ [c] $= AF \times BF$ & $FC^2 - CD^2 = FD^2$ [d]; donc $FD^2 = AF \times BF$; donc FD touche le cercle ARB en D [e]; donc le cercle ARB touche le cercle QDH [f], & passe par les points A & B.

[b] Const.

[c] 6. 2.

[d] Cor. 7. 2.

[e] 17. 3.

[f] Const. & Défin. 10. 3.

C. Q. F. D.

Si l'arc nQ ne coupoit pas le cercle donné de position, ce qui arriveroit si AP étoit plus petit que la distance du point P au cercle; alors pour déterminer la position du point q, il suffira de prendre deux rayons Pq, Cq qui soient tels qu'on ait $Pq^2 - Cq^2 = PA^2 - CD^2$, car

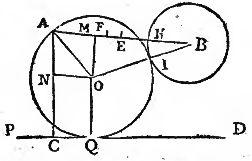
ayant alors comme ci-dessus $PF^2 - Pq^2 = CF^2 - Cq^2$, on aura $PF^2 - CF^2 = Pq^2 - Cq^2$; mais $Pq^2 - - Cq^2 = PA^2 - CD^2$ par la supposition ; donc $PF^2 - CF^2 = AP^2 - CD^2$ ou $PF^2 - AP^2 = CF^2 - CD^2$; d'où l'on tirera enfin $AB \times BF = FD^2$.

Si l'on vouloit que le cercle demandé, touchât le donné intérieurement, la construction seroit la même, il faudroit seulement mener la tangente F d au lieu de FD.

Ce Probleme peut être construit au moyen du quatorziéme Probleme ; car il se réduit à trouver dans la perpendiculaire PR, qui divise AB par le milieu, un point O qui soit tel qu'ayant mené OC, OB ces deux lignes ayent une différence donnée CD, & ce point O sera le centre du cercle requis ; car si $OC - OB = CD$, il est évident que $OD = OB$, & conséquemment que le point, D est sur la peripherie du cercle ARB ; donc, &c.

PROBLEME XLIII.

Par un point donné A *décrire un cercle qui touche une droite* PD *donnée de position, & un cercle* BHI *donné de grandeur & de position.*



Abaiſſez ſur PD la perpendiculaire AC; du centre B menez BA qui coupera le cercle donné en H; diviſez AB en deux également en E, & prenez EF troiſiéme proportionelle à 2 AB & BH; menez AO de façon qu'au moyen des perpendiculaires ON, OM qu'on a abaiſſé du point O ſur AB,

AC les lignes AO, CN soient égales, & qu'elles soient de plus à FM comme AB est à BH [a]. Le point O sera le centre du cercle requis.

a *Probl.* 38.

Abaissez OQ perpendiculaire à PD & menez BO. La figure NCQO est un rectangle [b]; donc OQ=CN = AO [b]; donc le cercle touche PD en Q. Maintenant puisque $2AB : BH = BH : EF$ & $AB : BH = AO : FM$ [b], nous aurons $AB \times EF = \frac{1}{2} BH^2$ & $AB \times FM = BH \times AO$, & en ajoutant $AB \times EF + AB \times FM = (AB \times EM) = \frac{1}{2} BH^2 + BH \times AO$, & conséquemment $AB \times 2EM = BH^2 + BH \times 2AO$; mais $AB \times 2EM = BO^2 - AO^2$ [c]; donc $BO^2 - AO^2 = BH^2 + 2AO \times BH$ & $BO^2 = BH^2 + 2AO \times BH + AO^2 = \overline{BH + AO}^2$ [d], d'où en extrayant la racine quarrée on a $BO = BH + AO$, & en ôtant $IO = AO$ restera $BI = BH$; donc les deux cercles se touchent au point I qui leur est commun.

b *Conſt.*

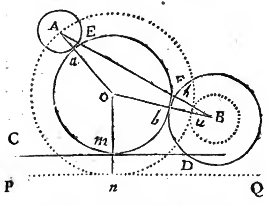
c *Coro.* 8. 2.

d 5. 2.

C. Q. F. D.

PROBLEME LXIV.

Décrire un cercle qui touche une droite CD *donnée de position, & deux cercles* AEa, BFb *donnés aussi de position & de grandeur.*



Du rayon BF du grand cercle ôtez F*h* égal au rayon AE du plus petit ; du centre B avec le rayon B*h* décrivez le cercle B*hu* ; menez PQ parallele à CD & à la distance F*h* ou AE.

Cherchez ensuite par le dernier Probleme le centre O d'un cercle

qui passe par le point A, & qui touche PQ & Bhu, ce même point O sera le centre du cercle requis $Oamb$ dont le rayon sera $= On - mn$.

Menez On perpendiculaire à PQ coupant CD en m; menez aussi OA, OB qui couperont aussi les cercles A & B en a & en u. Puisque AO, uO & nO sont égaux ainsi que Aa, bu, & nm [a]; on aura $AO - Aa = uO - bu = nO - nm$ [b], c'est-à-dire, $aO = Ob = Om$.

[a] *Conft.*

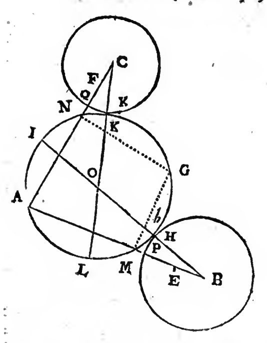
[b] *Axiom.* 5. 1.

C. Q. F. D.

PROBLEME XLV.

***Décrire** un cercle par un point donné* A *& qui touche deux autres cercles* B *&* C *donnés de grandeur & de position.*

Ayant mené AB, AC, qui coupent en P & en Q les cercles don-



nés B & C, faites AB : BP = BP : BE, ainsi que AC : CQ = CQ : CF.

Cherchez ensuite par le Probleme XXXVIII un point G qui soit tel que les perpendiculaires GM, GN, abaissées de ce point sur AB & AC en retranchent les parties EM, FN, dont l'une EM soit à AG = BP : AB & l'autre FN soit aussi à AG = CQ : AC ; joi-

gnez AG que vous diviserez également en O, duquel comme centre avec le rayon AO vous décrirez le cercle requis.

Du point B par O menez BI qui coupera le cercle B en H, & le cercle O en h; menez de même CL qui coupera le cercle C en K, & le cercle O en k.

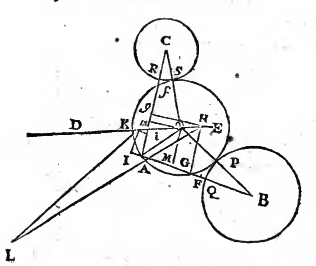
Puisque AG : EM = AB : BP (BH)[a]. On a $AG \times BH = EM \times AB = AB \times \overline{BM - BE}$ [b] $= AB \times BM - AB \times BE$; mais en mettant à la place de $AB \times BE$ son égal BP^2 [a] ou [a] BH^2, on a $AG \times BH = AB \times BM - BH^2$, & conséquemment $\overline{AB \times BM}$ ($= AG \times BH + BH^2 = \overline{AG + BH} \times BH$[c]) ou = à $\overline{BH + hI} \times BH$ puisque AG & Ih sont des diamétres du même cercle. Mais $AB \times BM$ est aussi $= \overline{Bh + hI} \times Bh$*, donc H & h coincident, donc les cercles se touchent en ce point H. On prouvera de même que les cercles O & C se touchent au point K.

a Const.
b 4. 2.
c 4. 2. & 17. 3.

* Car puisque GM est par la construction perpendiculaire à AB, il s'ensuit par le Théorême XI du troisieme Livre que le point M est sur la circonférence du cercle OAG. Il en est de même du point N.

AUTRE CONSTRUCTION.

Menez AB & AC que vous diviſerez en deux également au points F & f; prenez FG troiſiéme proportionelle à 2AB & au rayon BQ. Faites de même fg troiſiéme proportionelle à 2AC & au rayon CR ; prenez GI = BQ & gi quatriéme proportionelle à AC, AB & CR; menez GH, IK; gH & iK perpendiculaires à AB & à AC qui s'entrecouperont en H & en K; par ces deux points H & K menez la droite indéfinie DE, & du centre K avec le rayon AB décrivez un arc de cercle qui rencontre en L une droite indéfinie ménée par H & par A ; joignez L, K & par A menez-lui parallelement la droite AO, qui ira couper DA au point O centre du cercle requis.



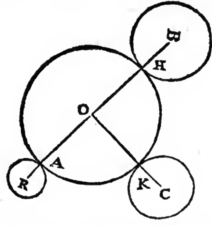
Soit OM & Om perpendiculaires à AB & à AC, & soient tirées OB & OC.

Puisque AC : AB = CR : gi (par la conf.) & que KL ou AB : AO = (HK : HO) = gi : gm, il s'ensuit qu'on aura AC : AO = CR : gm, & conséquemment AO × CR = AC × gm; maintenant si au double de ces deux rectangles égaux on ajoute de part & d'autre CR² & 2AC × fg, qui sont aussi égaux par la construction, on aura 2AO

$\times$ CR+CR^2=(2AC $\times$ *fm*)= CO^2 – AO^2 (par la 6e & 8e du second;) d'où en transposant AO^2 on aura AO^2+ 2AO $\times$ CR + CR^2 = CO^2 & en extrayant la racine quarrée AO + CR = CO , d'où il est évident que le cercle décrit du centre O avec le rayon AO touche le cercle C. En faisant le même raisonnement on verra qu'il touche aussi le cercle B ; car puisque KL ou AB : AO= (KH : HO)= GI ou BQ : GM on aura AB : AO = BQ : GM , c'est-à-dire , AB $\times$ GM=AO $\times$ BQ , & si on ajoute de part & d'autre au double de ces rectangles les rectangles égaux (par la construction) BQ^2 = 2AB $\times$ FG on a 2AO $\times$ BQ + BQ^2 = (2AB $\times$ FM) = BO^2 – AO^2, d'où en transposant AO^2 & en extrayant la racine quarrée on a AO + BQ = BO.

C. Q. F. D.





Nota. Si l'on propoſoit de décrire un cercle qui en touchât trois autres donnés de grandeur & de poſition, le Problême ſe réduiroit à trouver un point O qui fût tel que la différence des trois lignes menées de ce point à leurs centres fût égale à la différence de leurs rayons*; il eſt évident qu'alors O ſeroit le centre du cercle cherché, car ſi on a $OB - OC = HB - KC$, on

* Voyez les Sections coniques de M. le Marquis De l'Hoſpital, page 374.

aura $OB - HB = OC - KC$, c'est-à-dire, $OH = OK$. De même $OB - OR = HB - AR$, donc $OB - HB = OR - AR$ & $OH = OA$, donc $OK = OH = OA$.

C. Q. F. D.

FIN.

APPROBATION

APPROBATION du Censeur Royal.

J'Ai lu par ordre de Monseigneur le Chancelier les *Elémens de Géométrie traduits de l'anglois de M. Thomas Simpson*. Je n'y ai rien trouvé qui puisse en empêcher l'Impression. Fait à Paris ce premier Avril 1753.

MONTCARVILLE,
Lecteur & Professeur Royal en Mathématique.

AUTRE APPROBATION.

J'Ai lu par ordre de Monseigneur le Chancelier l'*Essai sur les Maximis & Minimis*, dans lequel je n'ai rien trouvé qui puisse en empêcher l'Impression. Fait à Paris ce 3 Septembre 1753.

MONTCARVILLE.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maî-

tres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé PHILIPPE VINCENT, Fils, Imprimeur-Libraire à Paris, Nous a fait exposer qu'il désireroit imprimer & donner au Public des Ouvrages qui ont pour titre: *Essai sur les Alimens; Elémens de Géométrie traduits de l'anglois de Thomas Simpson*, s'il Nous plaisoit de lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce nécessaires : A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant : Nous lui avons permis & permettons par ces Presentes d'imprimer lesdits Ouvrages en un ou plusieurs volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de six années consécutives, à compter du jour de la date desdites Presentes. Faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance, comme aussi d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucun extrait, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des Contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts : A la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume & non

ailleurs, en bon papier & beaux caractères, conformément à la feuille imprimée & attachée pour modele sous le contre-scel des Présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; qu'avant que de les exposer en vente, les Manuscrits qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chancelier de France le Sieur DE LAMOIGNON, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier Chancelier de France le Sieur DE LAMOIGNON, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur DE MACHAULT Commandeur de nos Ordres; le tout à peine de nullité desdites Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant, ou ses Ayans-causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la Copie desdites Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers Secretaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & necessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires: CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Versailles le vingt-huitieme jour du mois de Mai, l'an de grace

mil sept cens cinquante-trois ; & de notre Regne le trente-quatrieme.

Par le Roi en son Conseil, SAINSON.

Registré sur le Registre XIII. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 198. fol. 157. conformément aux anciens Réglemens confirmés par celui du 28 Février 1723. A Paris le 6 Juillet 1753.

J. HERISSANT, *Adjoint.*

